

Gerhard Höhne

Mechanik mit der Experimentierwippe

für den Physikunterricht
an Gymnasien

Kein Teil dieser Broschüre kann ohne schriftliche Einwilligung des Herausgebers in irgendeiner Form vervielfältigt oder verbreitet werden.

Gerhard Höhne, Im Hagen 5, 63768 Hösbach-Winzenhohl

E-Post: b-g.hoehne@arcor.de

Vorwort

Ein Schüler findet einen Unterricht nur dann interessant, wenn er seine Fantasie anregt und er mit eigenen Gedanken den Verlauf des Unterrichts mitgestalten kann.

Aus dieser Einsicht heraus entwickelte ich ein Experimentiergerät, welches die Schüler zu immer neuen, weiterführenden Versuchsvorschlägen veranlasst und damit einen kontinuierlichen Verlauf des Physikunterrichts begünstigt.

Es ist ein unter dem Namen „**Experimentierwippe**“ bekanntes, sehr vielseitiges, robustes Messgerät zur Messung von Wegen, Kräften und Drehmomenten, welches seine Messwerte als elektrische Signale über einen Analog-Digitalwandler an einen Computer zur Darstellung vermittelt. Das **CASSY** von Leybold-Didactic, der Wireless-Spannungs-Sensor für das I-Pad der Firma MEKRUPHY und der sehr preisgünstige Minicomputer **Arduino** (Preis < 15 € bei Amazon) sind passende Wandler hierfür.

Die Funktionsweise der Experimentierwippe ist leicht verständlich. In seiner Handhabung ist es so einfach, dass es sich auch als Praktikumsgerät für Schüler gut eignet. Seine Vielseitigkeit macht es möglich, dass außer dem Gravitationsgesetz alle wichtigen Gesetze der Mechanik damit experimentell erarbeitet werden können. Als besonders positives Merkmal ist hervorzuheben, dass es die Schüler zu Experimenten anregt, die sehr schnell zum Impulssatz führen.

Der Impulssatz sollte entgegen den in der Schulliteratur üblichen Gepflogenheiten der Einführung des Kraftmaßes vorangehen, da die Definition dieser Größe nach $F = d(m \cdot v) / dt$ erst mit Bezug auf dieses Gesetz sinnvoll erscheint. Nur mit dem Impulssatz kann überzeugend dargelegt werden, dass $\Delta(m \cdot v)$ ein passendes Maß für eine äußere Einwirkung ist. Außerdem spricht für die hier gewünschte Stellung des Impulssatzes die Tatsache, dass nach Einführung des Kraftmaßes das Wechselwirkungsgesetz und das Additionsgesetz der Kräfte deduktiv hergeleitet werden können.

Die vorgeschlagene Folge entspricht dem axiomatischen Aufbau Newtons. Lex prima ist unter Berücksichtigung der ihm vorangestellten Definitionen über die Größe der Bewegung als Impulssatz aufzufassen.

Es muss darauf aufmerksam gemacht werden, dass jeder Gegenstand ein System aus vielen Atomen darstellt. Bei Ungültigkeit des Impulssatzes wären an einem solchen Gegenstand auch ohne äußere Einwirkungen Impulsschwankungen zu erkennen (Impuls des Schwerpunkts = Summe aller Einzelimpulse), denen fälschlicherweise eine von außen wirkende Kraft zugeordnet würde.

In vielen Schulbüchern wird die Kraft in einer Art eingeführt, die kritische Schüler nicht zufrieden stellen kann. Meistens geschieht dies in folgender Weise. Da wird zunächst so getan, als ob die Kraft schon definiert sei. Die Beziehung $F \sim m \cdot a$ wird experimentell nachgewiesen und anschließend die Krafteinheit so gewählt, dass $F = m \cdot a$ geschrieben werden kann. Ebenso fragwürdig ist dann auch die Einführung des Wechselwirkungsgesetzes. Zu seiner Begründung wird auf die Impulserhaltung in ganz speziellen Fällen verwiesen, in denen gleich schwere, anfangs ruhende Körper einander anziehen oder abstoßen. Diesen Ausführungen folgt dann noch ein Zirkelschluss; mit dem so gewonnenen Wechselwirkungsgesetz wird der Impulssatz hergeleitet. Manchmal wird das Wechselwirkungsgesetz mit gegeneinander wirkenden Federkraftmessern demonstriert. Da ein Schüler davon ausgeht, dass derartige Kraftmesser statisch mit Gewichten kalibriert werden, dieses Kalibrierverfahren jedoch nicht ohne das Wechselwirkungsgesetz und das Additionsgesetz der Kräfte begründet werden kann, erscheint diese Demonstration sehr

zweifelhaft. Wird der Impulssatz nicht scheinbar deduktiv, sondern stattdessen experimentell erarbeitet, dann ist seine Behandlung schon in den ersten Unterrichtsstunden über Mechanik möglich, und der Lehrer kann auf sehr interessante Anwendungen zu diesem wichtigen Satz eingehen. Ein besonders eindrucksvolles Beispiel ist die Aufnahme eines Ballistokardiogramms. Derartige Beispiele sind zur Auflockerung des etwas trockenen Stoffes unbedingt notwendig.

In der hier vorliegenden Abhandlung der Mechanik wird auch gezeigt, wie man mit <http://g-hoehne.de/Sim.html> (Rechtsklick, in neuem Fenster öffnen) komplizierte erscheinende Bewegungen (Wurf mit Reibung, Planetenbewegung usw.) in kleinen Schritten berechnen und grafisch darstellen kann.

Über Sim.html werden Rechenprogramm und zugehörige Daten an ein Programm sim.php im Internet vermittelt. Das Programm sim.php führt das eingegeben Programm aus.

Sim.html wird normalerweise über <https://www.g.hoehne.de/Sim.html> (Rechtsklick, in neuem Fenster öffnen) aufgerufen. Man kann Sim.html auch aus dem Internet herunterladen. Die Daten von Sim.html können dann vom eigenen Rechner aus an das genannte php-Programm gesendet werden.

Lehrer, Studenten und Schüler können Sim.html-Seiten mit eigenen Programmen und den dazu passenden Einstellungen für Vorträge auf dem eigenen Rechner speichern.

Zu Modifikation einer Sim.html-Seite wird diese in einem Texteditor geöffnet. Im Text sind Hinweise, wo und wie etwas geändert werden kann.

Wichtig: Statt ACTION="sim.php" muss in sim.html ACTION="<http://g-hoehne.de/sim.php>" geschrieben werden. Beim Senden aus einer so geänderten Seite kann es eine Warnung bezüglich ihrer Sicherheit geben. Diese Warnung kann übergangen werden.

Gerhard Höhne

Inhaltsverzeichnis

1. Was versteht man unter Mechanik.....	1
2. Die Experimentierwippe.....	1
3. Grundbegriffe der Mechanik	
3.1 Gleichförmige Bewegung.....	3
3.2 Der Trägheitssatz.....	3
3.3 Die Masse.....	4
3.4 Schwerpunkt, Schwerpunktsatz, Impuls und Impulssatz.....	5
3.5 Vektoren.....	8
3.6 Definition der Kraft und des Kraftmaßes.....	12
3.7 Momentangeschwindigkeit.....	15
3.8 Der Freie Fall.....	16
3.9 Bewegung eines Läufers (Momentanbeschleunigung).....	17
3.10 Über den Umgang mit Einheiten.....	18
4. Bewegung unter einer nach Richtung und Betrag konstanten Kraft.....	18
5. Bewegung unter konstanter Normalkraft	22
6. Gesetze zur Kraft	
6.1 Das Wechselwirkungsgesetz.....	26
6.2 Gesetz zur Addition der Kräfte.....	27
7. Messung von Kräften	
7.1 Kraftmessung mit einer Schraubenfeder.....	32
7.2 Kraftmessung mit der Experimentierwippe (Drehmoment).....	32
7.3 Kraftmessung mit einem Konstantandraht.....	35
8. Über den Auftrieb in Flüssigkeiten und Gasen.....	36
9. Reibungskräfte	
9.1 Gleitreibung.....	38
9.2 Haftreibung.....	38
9.3 Reibungskräfte in einer Flüssigkeit.....	39
9.4 Reibungskraft der Luft.....	41
10. Schwingungen	
10.1 Die Harmonische Schwingung.....	42

10.2 Gedämpfte Schwingung	44
10.3 Das Fadenpendel.....	45
10.4 Schwebung.....	46
10.5 Erzwungene Schwingung	46

11. Gravitationskraft und Planetenbewegung

11.1 Die Gravitationskraft.....	50
11.2 Berechnung einer Planetenbahn.....	51
11.3 Die Keplerschen Gesetze	51
11.4 Flächengeschwindigkeit (Vektorkreuzprodukt)	52
11.5 Masse der Sonne.....	55
11.6 Newtons Herleitung des Gravitationsgesetzes.....	55

12. Arbeit, Leistung, Energie

12.1 Arbeit, Leistung.....	55
12.2 Energie (Perpetuum Mobile).....	56
12.3 Energiearten	57
12.4 Satz von der Erhaltung der Energie.....	58
12.5 Anwendungsbeispiele zum Energieerhaltungssatz.....	59

13. Trägheitskräfte

13.1 Was versteht man unter einer Trägheitskraft.....	62
13.2 Die Zentrifugalkraft.....	63
13.3 Die Corioliskraft	64

14. Mechanik rotierender Körper

14.1 Drehimpuls und Drehimpulssatz.....	70
14.2 Das Drehmoment.....	72
14.3 Winkelbeschleunigung und Drehmoment.....	73
14.4 Drehschwingungen.....	76
14.5 Über das Schaukeln.....	77
14.6 Der Kreisel.....	78

15. Wellen

15.1 Quer- und Längswellen, Wellengeschwindigkeit.....	80
15.2 Die periodische, fortschreitende Welle.....	83
15.3 Die stehende Welle (Interferenz).....	83
15.4 Interferenz von Kreiswellen.....	86
15.5 Über die Wellennatur des Lichtes.....	87

16. Lösungen zu den Aufgaben.....88

1. Was versteht man unter Mechanik ?

Für viele Menschen steht das Wort Mechanik für Geräte mit beweglichen Teilen, z.B. Flaschenzüge, Getriebe, Scharniere, Schlösser, Riegel usw.. Ein solches Bild zum Wort Mechanik hätte man noch im 16. Jahrhundert als zutreffend gelten lassen. Als man jedoch begann, die Bewegung von Sternen und fallenden Körpern zu untersuchen, wurde aus der Mechanik das Wissen über die Bewegung.

Wenn zur Einführung in die Mechanik das Verhalten von rollenden und fallenden Kugeln untersucht wird, dann geschieht dies nicht aus besonderem Interesse an Kugeln, sondern mit der Absicht, Bewegungsgesetze zu finden, die sowohl zur Behandlung von Planetenbewegungen wie zur Planung von Motoren, Flugzeugen und anderen technischen Geräten unerlässlich sind. Auf der Suche nach Bewegungsgesetzen ist zu bedenken, dass Naturgesetze sich nur selten in komplizierten Erscheinungen offenbaren. Will man eine komplexe Erscheinung ergründen, dann sollte man sich zunächst nach vergleichbaren, einfacheren Phänomenen umschauen.

2. Die Experimentierwippe

Die Voraussetzung für die Entdeckung von Bewegungsgesetzen ist die genaue Beschreibung von Bewegungen. Deshalb wird ein Messgerät gewünscht, welches eine laufende Aufzeichnung eines Körperstandortes ermöglicht. Angesichts der leistungsfähigen Instrumente, die es zur Registrierung elektrischer Größen gibt (**Cassy** der Firma Leybold-Didactic, **Arduino**.....), ist der Wunsch nach Messwandlern verständlich, die elektrische Messungen mechanischer Größen ermöglichen.

Spule als Messwandler

Zur Messung kleiner Verschiebungen ist eine Spule aus Kupferlackdraht in Verbindung mit einem Magneten geeignet (siehe Abb. 2.1). Wird ein bis zur Mitte der Spule hineinreichender Magnet ein wenig verschoben, dann fließt durch das angeschlossene Messgerät eine zur Verschiebung proportionale elektrische Ladung. Sie wird mit der Einheit Coulomb (1 Coulomb entspricht ca. $62418 \cdot 10^{14}$ Elektronen) angezeigt. Größere Verschiebungen kann man auf diese Weise nur dann messen, wenn man dafür sorgt, dass mit ihnen kleinere Verschiebungen einhergehen. Dies gelingt mit der sogenannten **Experimentierwippe** (siehe Abb.2.2).

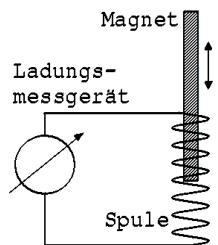


Abb. 2.1



Abb. 2.2: Oberseite der Wippe

Eine gerahmte Glasplatte ist in ihrer Mitte (siehe Abb.2.3) mit zwei dünnen Eisenbändern an einem Aluminiumrahmen befestigt. Die Eisenbänder lassen eine Drehung der Platte um deren

Mitte gegen den Widerstand einer Blattfeder (Rückstellfeder) am linken Rand der Wippe zu. Eine geringe Drehung erfährt die Platte z.B. dann, wenn eine Kugel oder ein Experimentierwagen über sie rollt. Die der Verschiebung des Experimentierobjekts proportionale Drehung ist bei einer Masse m des Objekts $< 0,15 \text{ kg}$ geringer als $0,1^\circ$ und hat somit keinen merkbaren Einfluss auf die Bewegung. Die Eigenschwingung der Platte (10 Schwingungen/Sekunde) kann mit Fett zwischen zwei Aluminiumplättchen am rechten Rand der Wippe gedämpft werden (siehe Abb.2.2 auf Seite 1).

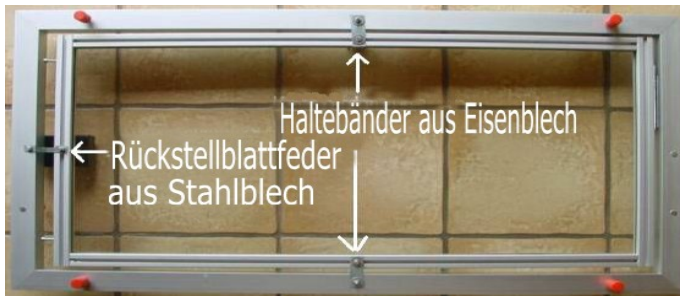


Abb. 2.3: Unterseite der Wippe

Zur Messung der Drehung ist am äußeren Rahmen, in einem Gehäuse verborgen, eine Spule mit vielen Windungen aus Kupferlackdraht befestigt (siehe Abb.2.4). In diese Spule ist ein sehr starker, kleiner Stabmagnet eingeführt, der an der beweglichen Wippe befestigt ist.

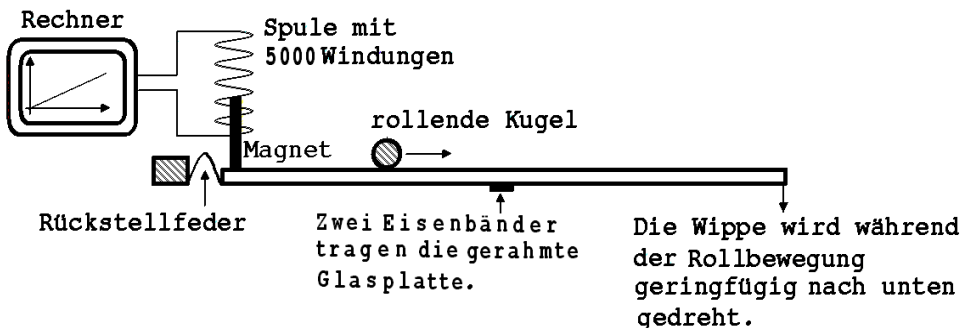


Abb. 2.4: Funktionsskizze

Wenn sich die Wippe während der Bewegung einer über sie rollenden Kugel dreht (weniger als $0,1^\circ$), verursacht der Magnet einen elektrischen Strom in der Spule. Die dabei durch die Spule fließende elektrische Ladung ist proportional zur Drehung. Ein an die Spule angeschlossener Computer registriert diese Ladungen in regelmäßigen Abständen und ordnet ihnen nach einem Messprogramm die entsprechenden von der Kugel zurückgelegten Strecken zu. Die Messergebnisse werden durch Punkte dargestellt, die mit ihren Abständen von den zwei Achsen eines Koordinatensystems sowohl die Strecken als auch die zugehörige Zeiten anzeigen. Ein Weg - Zeit - Diagramm wird erstellt, wie es in der Abb. 2.5 zu sehen ist. Es wurde während der Rollbewegung einer Kugel auf der horizontal ausgerichteten Wippe aufgenommen. Der Messpunkte P auf der aufsteigenden Strecke zeigt mit seinen Abständen von den Koordinatenachsen an, dass in der Zeit von 6 Sekunden 30 cm zurückgelegt wurden. Möchte man wissen, welcher Weg in 8s zurückgelegt wurde, dann muss man von der zu 8s

gehörenden 9 Zeitmarke eine senkrecht nach oben bis zur Weg-Zeit-Kurve reichende Strecke errichten. Dieser Strecke entspricht hier 39 cm. Ein solches Weg-Zeitdiagramms kann als Spur vom oberen Ende einer senkrechten Strecke s aufgefasst werden, die gleichförmig über die Zeitachse gleitet und dabei mit ihrer Länge den jeweiligen zurückgelegten Weg anzeigt.

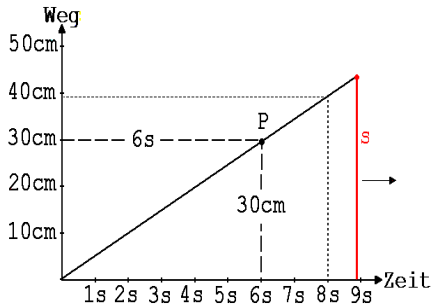


Abb. 2.5

3. Grundbegriffe der Mechanik

3.1 Gleichförmige Bewegung

Wir lassen eine Kugel über die waagrecht eingestellte Wippe rollen. Es entsteht hierbei ein geradliniges Diagramm (siehe Abb. 3.1), an dem zu erkennen ist, dass in gleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt werden.

Eine Bewegung mit dieser Eigenschaft heißt gleichförmig.

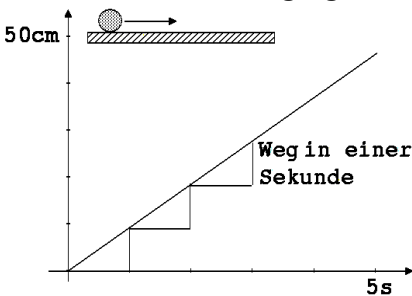


Abb. 3.1



Abb. 3.2: Hotelschiff in gleichförmiger Fahrt auf dem Rhein bei Kaub

Der zurückgelegte Weg s ist der Bewegungszeit t proportional. Das konstante Verhältnis aus Weg und Zeit trägt den Namen Geschwindigkeit $v = s / t$. Es beschreibt die Strecke, welche in einer Zeiteinheit zurückgelegt wird.

3.2 Der Trägheitssatz

Eine Eisenkugel wird auf einem Tuch angestoßen, welches zuvor auf die Glasplatte gelegt wurde. Das s - t -Diagramm hat nun einen gekrümmten Verlauf (siehe Abb. 3.3). Die Krümmung der Kurve fällt geringer aus, wenn ein weniger raues Tuch gewählt wird. Die Kugelbewegung passt sich einer gleichförmig-geradlinigen Bewegung umso mehr an, je weniger die Rollbahn durch Unebenheiten auf sie einwirkt. Dies lässt den folgenden als **Trägheitssatz** bekannten Schluss zu:

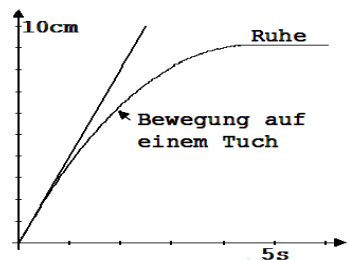


Abb. 3.3

Ein Körper verharrt in Ruhe oder in gleichförmig-geradliniger Bewegung, wenn seine Umgebung nicht auf ihn einwirkt.

Die folgenden zwei Beispielen dienen der Veranschaulichung dieses Gesetzes.

1. Ein Experimentierwagen steht auf einer Glasplatte, die auf dem Experimentiertisch liegt. Wird an der Glasplatte ruckartig gezogen, dann wird der Wagen nur sehr wenig mitbewegt (siehe Abb. 3.4).

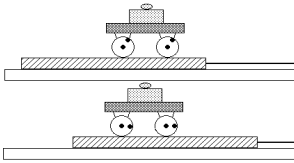


Abb. 3.4

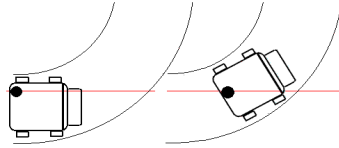


Abb. 3.5

2. Man denke sich einen Lastwagen in einer Linkskurve (siehe Abb.3.5). An der linken Ecke der Ladefläche stehe ein einzelner Kartoffelsack. Dieser Sack verharrt ohne äußeren Zwang in einer gleichförmigen Bewegung. Infolgedessen rutscht er von der einen Ecke in die gegenüberliegende Ecke der Ladefläche .

3.3 Die Masse

Eine rollende Eisenkugel wird im Gegensatz zu einer Glaskugel gleichen Volumens bei einem Stoß auf ein Stück Kreide nur geringfügig abgelenkt. Die Eisenkugel reagiert weniger empfindlich auf ein Hindernis als die Glaskugel. Man sagt, sie sei träger als die Glaskugel.

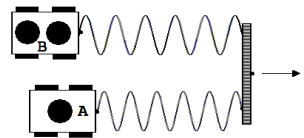


Abb.3.6

Abb.3.6 zeigt, wie man zwei Körper hinsichtlich ihrer Trägheit vergleichen kann. Zwei zunächst nebeneinander stehende Experimentierwagen mit unterschiedlicher Ladung sind mit gleichartigen Schraubenfedern an einem Stab angebunden. Wird am Stab gezogen, dann folgen ihm die beiden Wagen, wobei der Wagen B anfangs hinter dem Wagen A zurückbleibt. B ist träger als A. Soll die Trägheit eines Körpers K beschrieben werden, dann vergleicht man K mit einem als kg bekannten Einheitskörper. Es wird die Menge von kg-Körpern angegeben, die zusammengenommen genauso träge sind wie K.

Diese Menge heißt Masse von K

In Abb.3.7 ist eine Waage dargestellt, mit der normalerweise Massenvergleiche durchgeführt werden.

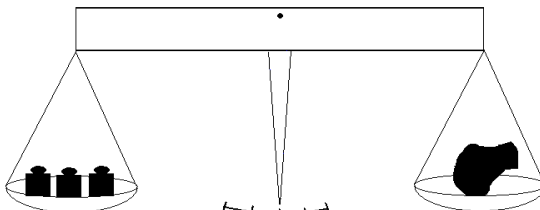


Abb.3.7



Abb.3.8

Abb.3.8: Keltische Waage (Grabfund Frankfurt-Fechenheim, 2 Jhdt. v. Chr.)

Dieser Vergleich ist möglich, weil zwei Körper gleicher Masse sich in ihrer Wirkung auf einen Hebel nicht unterscheiden. Man sagt: Die schwere Masse ist gleich der trägen Masse. In Verbindung mit dem Wort Masse wird oft der Begriff Dichte genannt.

Die Dichte ρ eines Körpers K ist durch den Quotienten Masse von K / Volumen von K definiert. Sie beschreibt die Masse einer Volumeneinheit.

Folglich gilt: Masse = Volumen · Dichte.

3.4 Schwerpunkt, Schwerpunktsatz, Impuls und Impulssatz

Auf der waagrecht eingestellten Experimentierwippe rollt eine Glaskugel auf zwei andere ruhende Glaskugeln. Trotz des Stoßes zeichnet der Rechner ein lineares Diagramm (siehe Abb.3.9).

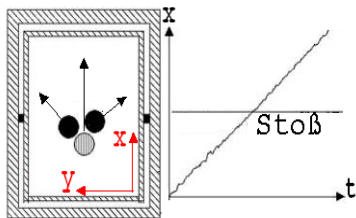


Abb.3.9

Hinweis für den Experimentator

Der Experimentator sollte die Kugel nicht mit der Hand, sondern mit einem Löffel oder einem Döschen anstoßen, da andernfalls störende Schwingungen der Wippe kaum vermieden werden können.

Was wird hier angezeigt ?

Wenn die drei Kugeln gleicher Masse K_1 , K_2 und K_3 an einem Punkt P (siehe Abb.3.10) zusammen liegen, dann ist deren gemeinsamer Abstand x von der einen Schmalseite der Wippe maßgebend für ihre Wirkung auf die Wippe. Sind sie über die Platte verteilt, dann wird die Drehung der Wippe durch den Mittelwert $\bar{x}$ der Abstände x_1 , x_2 und x_3 bestimmt. Der Punkt, dessen Koordinaten x , y und z durch Mittelwertbildung aus den Koordinaten der drei Kugeln gewonnen wird, heißt Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) P der drei Kugeln. Seine Lage wird von der Wippe angezeigt.

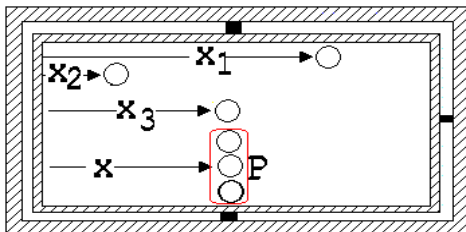


Abb.3.10

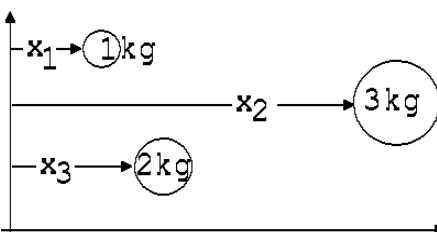


Abb.3.11

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + x_3) / 3$$

Bei unterschiedlichen Massen müssen die Kugeln zunächst gedanklich in Teile gleicher Masse zerlegt werden. Erst dann können die Schwerpunktkoordinaten durch Mittelwertbildung berechnet werden (siehe Abb.3.11).

$$\bar{x} = (1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3) / 6 = (1 \text{ kg} \cdot x_1 + 3 \text{ kg} \cdot x_2 + 2 \text{ kg} \cdot x_3) / 6 \text{ kg}$$

$$\bar{x} = (m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3) / (m_1 + m_2 + m_3)$$

Definition des Schwerpunkts (Massenmittelpunkts): Wir denken uns ein System in nahezu punktförmige kleine Teile gleicher Masse eingeteilt. Es werden Mittelwerte gebildet aus den x -Koordinaten, dann aus den y -Koordinaten und schließlich aus den z -Koordinaten. Der Punkt mit diesen drei Mittelwerten als Koordinaten heißt Schwerpunkt des Systems.

Das in Abb.3.9 gezeigte Experiment lässt den Schluss zu: **Der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems (System ohne Wechselwirkung mit seiner Umgebung) ist entweder in Ruhe oder er bewegt sich gleichförmig.** Diese als **Schwerpunktsatz** bekannte Aussage ist als eine Verallgemeinerung des Trägheitssatzes zu sehen.

Besonders eindrucksvolle Experimente zum Schwerpunktsatz sind in den Abbildungen 3.12, 3.13 und 3.14 dargestellt.

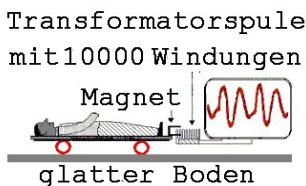


Abb. 3.12

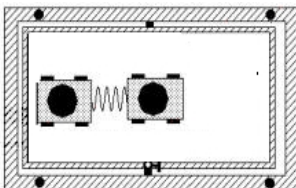


Abb.3.13

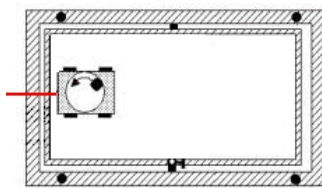


Abb. 3.14

Zu Abb. 3.12:

Ein Schüler liegt auf einem Brett, welches auf Wasserrohren aus Hartplastik gelagert ist. Hierfür sind die in Baumärkten angebotenen orangefarbenen Rohre zu empfehlen, welche in der Erde verlegt werden. Wenn Blut aus einer Herzkammer gepumpt wird, dann bewegt sich der Körper zur Erhaltung des Schwerpunkts entgegen der Strömungsrichtung. Diese Bewegung wird von einem Rechner in einem Ballistokardiogramm dargestellt. Zur Registrierung der Verschiebung ist am einen Ende des Bretts ein Hufeisenmagnet befestigt, dessen einer Pol in eine Transformatorspule mit 10000 Windungen hineinragt.

Zu Abb.3.13:

Zwei Experimentierwagen sind mit einer Schraubenfeder gekoppelt. Wird der eine angestoßen, dann wechseln die beiden fortwährend ihre Geschwindigkeiten. Der zweite ruht, der erste rollt, dann ruht der erste und der zweite rollt usw.. Trotzdem entsteht ein lineares Diagramm.

Zu Abb.3.14:

Auf einem Experimentierwagen steht eine Kristallisierschale. Während der Wagen an einem Faden festgehalten wird, stößt der Experimentator eine in ihr liegende Kugel zur Rotation an. Der Wagen bewegt sich nach seiner Freigabe ruckartig über die Bahn, wobei ein lineares Diagramm zur Bewegung des Schwerpunkts geschrieben wird.

Wie kann die Geschwindigkeit des Schwerpunkts berechnet werden ?

Wir denken uns ein abgeschlossenes System aus mehreren kleinen Gegenständen $K_1, K_2, K_3 \dots$ mit den x -Koordinaten $x_1, x_2, x_3 \dots$. Als Geschwindigkeit v_x seines Schwerpunkts in Richtung der x -Achse eines Koordinatensystems erhalten wir:

$$v_x = \Delta x / \Delta t = (m_1 \cdot \Delta x_1 / \Delta t + m_2 \cdot \Delta x_2 / \Delta t + m_3 \cdot \Delta x_3 / \Delta t + \dots) / (m_1 + m_2 + m_3 + \dots).$$

Δx : Änderung der Schwerpunktkoordinate x in der Zeit Δt

$$(m_1 \cdot \Delta x_1 / \Delta t + m_2 \cdot \Delta x_2 / \Delta t + m_3 \cdot \Delta x_3 / \Delta t + \dots) = v_x \cdot (m_1 + m_2 + m_3 + \dots)$$

$\Delta x_1 / \Delta t, \Delta x_2 / \Delta t, \Delta x_3 / \Delta t$ sind die Geschwindigkeiten v_{x1}, v_{x2} und v_{x3} von $K_1, K_2, K_3 \dots$ parallel zur x -Achse des Koordinatensystems.

Folglich ist $m_1 \cdot v_{x1} + m_2 \cdot v_{x2} + m_3 \cdot v_{x3} \dots$ bei konstantem v_x konstant.

Was für die x-Richtung zutrifft, muss auch für die y-Richtung und die z-Richtung gelten.

$m_1 \cdot v_{y1} + m_2 \cdot v_{y2} + m_3 \cdot v_{y3} \dots$ und $m_1 \cdot v_{z1} + m_2 \cdot v_{z2} + m_3 \cdot v_{z3} \dots$ sind auch konstant.

Das Produkt aus einer Masse m und deren Geschwindigkeit v heißt Impuls oder Bewegungsgröße. Nach dem Schwerpunktsatz gilt für jedes abgeschlossene System das als **Impulssatz** bekannte Gesetz:

Die Summe aus den Impulsen seiner Teile ist konstant.

Experimente zum Impulssatz

In Abb.3.15 sehen wir auf der Wippe einen zunächst ruhenden Wagen mit einem darauf befestigten Tafelschwamm (Gesamtmasse $m = 200\text{g}$). Die Wippe ist zum Reibungsausgleich so aufgestellt, dass sie nach rechts geringfügig abfällt. Wird mit einem Luftgewehr in den Schwamm geschossen, dann bewegt sich der Wagen anschließend gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v_w = \Delta x / \Delta t$. v_w kann anhand des Diagramms in der Abb.3.16 bestimmt werden.

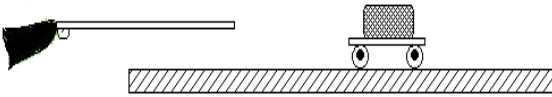


Abb.3.15

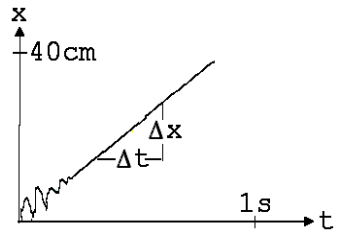


Abb.3.16

Der Impulssatz ermöglicht die Berechnung der Geschossgeschwindigkeit. Die Impulssumme vor dem Einschuss ist gleich dem Impuls $m_G \cdot v_G$ des Geschosses, denn anfangs steht der Wagen. Die Impulssumme danach ist gleich dem Impuls des Wagens mit Schwamm und dem Impuls des in ihm steckenden Geschosses. Folglich gilt: $m_G \cdot v_G = (m_w + m_G) \cdot v_w$. Ist m_G erheblich kleiner als m_w dann kann geschrieben werden:

$$m_G \cdot v_G \approx m_w \cdot v_w \rightarrow v_G \approx m_w \cdot v_w / m_G.$$

$m_G \cdot v_G$ ist maßgebend für die Stärke des Stoßes, den die Luftgewehrkugel dem Wagen erteilt. Der Name „Impuls (Stoß)“ für das Produkt $m \cdot v$ erscheint mit Blick auf das hier beschriebene Experiment angemessen.

Eine eindrucksvolle Demonstration zum Impulssatz ist mit dem in Abb.3.17 sichtbaren Raketenwagen möglich. Auf einem insgesamt 200 g schweren auf der Wippe stehenden Experimentierwagen ist ein sogenannter Heuler (Feuerwerkskörper) befestigt. Wird der Heuler angezündet, dann stößt er nach hinten heißes Gas aus und treibt dabei den Wagen voran. Das zugehörige s-t-Diagramm ist eine Parabel.

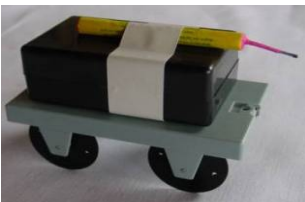


Abb.3.17

Wenn die Rollreibung des Wagens ausgeschlossen werden kann, dann ist die Summe aus dem Impuls des Gases und dem Impuls des Wagens gleich 0, denn das als Gas entweichende Material und der Wagen waren anfangs in Ruhe. Beide Impulse stimmen in ihren Beträgen überein, haben aber verschiedene Vorzeichen.

Aufgaben

1. Auf einem ruhenden, $m_W = 100 \text{ kg}$ schweren Wagen steht eine $m_P = 90 \text{ kg}$ schwere Person. Diese Person geht in Bezug auf den Wagen 5m von dem einen Ende des Wagens zum anderen.

Welchen Weg legt hierbei der Wagen auf einer waagrechten Bahn zurück, wenn von der Rollreibung abgesehen wird ?

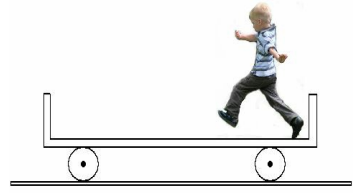


Abb.3.18

Anmerkung zur Lösung:

Mit $x = (x_W \cdot m_W + x_P \cdot m_P) / (m_W + m_P)$ erhält man die Koordinate x des gemeinsamen Schwerpunkts x vom Wagens W und der Person P . x_W und x_P sind Schwerpunktkoordinaten des Wagens und der Person.

2. Über eine horizontale Schiene rollt ein mit Kartoffeln beladener Wagen mit der Geschwindigkeit $v_0 = 5 \text{ m/s}$. Die gesamte Masse des Wagens m_0 beträgt 250 kg. In den rollenden Wagen fallen zwei Säcke Kartoffeln mit je $m = 50 \text{ kg}$. Welche Geschwindigkeit v hat der Wagen nach diesem Ereignis, wenn die Rollreibung vernachlässigbar ist ?

3. Auf einer horizontalen ebenen Fläche stehen zwei Experimentierwagen mit den Massen $m_1 = 150 \text{ g}$ und $m_2 = 250 \text{ g}$ (siehe Abb.3.19). Am Wagen der Masse m_1 ist eine gestauchte Schraubenfeder befestigt, welche gegen den schwereren Wagen drückt und dabei einen Faden straff hält, der zwischen den beiden Wagen aufgespannt ist. Wenn der Faden zerschnitten wird, dann löst sich der leichtere Wagen mit der Geschwindigkeit $v_1 = 2 \text{ m/s}$ vom anderen Wagen. Welche Geschwindigkeit v_2 hat der Wagen mit der Masse m_2 nach der Trennung der Fahrzeuge ?

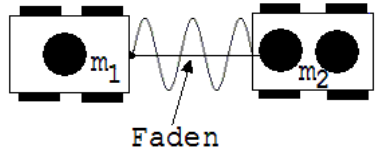


Abb.3.19

3.5 Vektoren

Man stelle sich nun einen mit der Geschwindigkeit v rollenden Wagen vor (siehe Abb.3.20), der wie ein Rollbrett nach allen Seiten frei beweglich ist. In den auf diesem Wagen liegenden Schwamm schlage ein Luftgewehrsgeschoss mit der Geschwindigkeit u ein. Der Einschlag des Geschosses ändert in diesem Fall auch die Bewegungsrichtung des Wagens. Damit die Anwendung der an eindimensionalen Bewegungen gewonnenen Gesetze möglich ist, werden das Geschoss und der Experimentierwagen auf die beiden Achsen des Koordinatensystems orthogonal projiziert. Die Projektionen bewegen sich vor dem Einschlag der Kugel in x -Richtung mit u_1 und v_1 und in y -Richtung mit u_2 und v_2 . Nach dem Einschlag der Kugel bewegt sich der Wagen zusammen mit der darin steckenden Kugel mit der Geschwindigkeit w_1 in x - und w_2 in y -Richtung. Der Impulssatz gilt für beide Bewegungsrichtungen!

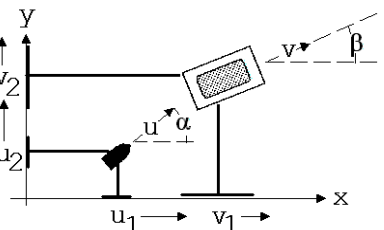


Abb.3.20: Draufsicht

$$m_G \cdot u_1 + m_W \cdot v_1 = (m_G + m_W) \cdot w_1; \quad m_G \cdot u_2 + m_G \cdot v_2 = (m_G + m_W) \cdot w_2$$

Aufgabe:

Gegeben sei $m_G = 0,5 \text{ g}$, $\alpha = 30^\circ$, $u = 60 \text{ m/s}$ und $m_W = 200 \text{ g}$, $\beta = 20^\circ$, $v = 0,5 \text{ m/s}$

Welche Geschwindigkeit und welche Bewegungsrichtung hat der Wagen nach dem Stoß durch die Kugel ?

Zur Anwendung des Impulssatzes müssen anhand der Angaben die Geschwindigkeiten beider Körper in x und y-Richtung berechnet werden. Zu diesem Zweck werden die Geschwindigkeiten vor dem Stoß durch Pfeile veranschaulicht. Die Pfeile werden so angelegt, dass sie nicht nur die Bewegungsrichtungen der Gegenstände, sondern auch noch mit ihren Längen deren Geschwindigkeiten anzeigen (siehe Abb. 3.21). Die Länge L eines Pfeils

kann z.B. gleich dem Weg sein, den ein Körper in 1 s, in 0,1 s oder in 0,01 s zurücklegt. Je nach gewählter Zeit repräsentiert ein solcher Pfeil die Geschwindigkeiten $v = L/1 \text{ s}$ bzw. $v = L/0,1 \text{ s}$ bzw. $v = L/0,01 \text{ s}$. Man sollte sich den Pfeil wie einen Zahlenstrahl skaliert vorstellen, sodass man an der Spitze den zugeordneten Wert ablesen kann. Derartige Pfeile setzt man immer dann ein, wenn neben der Angabe eines Maßes noch eine Richtungsbeschreibung nötig ist, man nennt sie **Vektoren**.

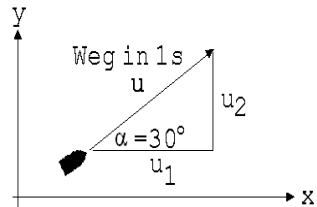


Abb. 3.21

u_1 und u_2 erhält man wie folgt: $u_1 = u \cdot \cos \alpha$; $u_2 = u \cdot \sin \alpha$.

Auf gleiche Weise erhält man für den Wagen: $v_1 = v \cdot \cos \beta$; $v_2 = v \cdot \sin \beta$.

Für die Geschwindigkeiten des Wagens nach dem Stoß in x- und y-Richtung gilt:

$$(m_W + m_G) \cdot w_1 = m_G \cdot u \cdot \cos \alpha + m_W \cdot v \cdot \cos \beta$$

$$(m_W + m_G) \cdot w_2 = m_G \cdot u \cdot \sin \alpha + m_W \cdot v \cdot \sin \beta$$

$$w_1 = (m_G \cdot u \cdot \cos \alpha + m_W \cdot v \cdot \cos \beta) / (m_W + m_G) = 0,598 \text{ m/s}$$

$$w_2 = (m_G \cdot u \cdot \sin \alpha + m_W \cdot v \cdot \sin \beta) / (m_W + m_G) = 0,245 \text{ m/s}$$

Mit den Ergebnissen für w_1 und w_2 ist die Aufgabe fast gelöst. Es fehlen nur noch Angaben über die Bewegungsrichtung und die Gesamtgeschwindigkeit w des Wagens nach dem Stoß.

Zu diesem Zweck wird der zu w_1 und w_2 passende Geschwindigkeitsvektor dargestellt. Die Gesamtgeschwindigkeit w erhält man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras. w_1 und w_2 beschreiben die Wege, die nach dem Einschlag der Kugel vom Wagen in einer Sekunde in x und y-Richtung zurückgelegt werden. Der Pfeil zeigt die Gesamtgeschwindigkeit nach Größe und Richtung an.

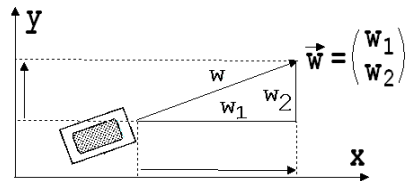


Abb. 3.22

$$w^2 = w_1^2 + w_2^2 \rightarrow w = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = 0,646 \text{ m/s (Betrag des Vektors } w)$$

Die orthogonalen Projektionen des Vektors auf die Koordinatenachsen werden Vektorkomponenten genannt (siehe Abb.3.22). Die zugehörigen Werte wie w_1 und w_2 heißen Vektorkoordinaten.

Ist eine Komponente der Koordinatenachse entgegen gerichtet, dann ist die zugehörige Vektorkoordinate negativ. Die Beschreibung eines Vektors geschieht meistens mit der Angabe seiner Koordinaten, die man normalerweise zu einer mit Klammern eingefassten Säule (oben die x-Koordinate, dann die y-Koordinate und schließlich bei räumlichen Vorgängen noch die

z-Koordinate), manchmal aber auch aus drucktechnischen Gründen in einer Reihe anordnet, z.B. so: $\{w_1; w_2; w_3\}$.

Aus dieser Beschreibungsform geht hervor, dass man Vektoren dann als einander gleich ansieht, wenn sie in diesen Koordinaten übereinstimmen. Dies bedeutet Übereinstimmung in Richtung und Länge, nicht jedoch im Anfangspunkt.

Als Zeichen für Vektoren sind Buchstaben mit einem kleinen aufgesetzten Pfeil oder fett gedruckte Buchstaben üblich. Wird ein solcher Buchstabe in Betragszeichen gesetzt, dann meint man den sogenannten Vektorbetrag. Dieser entspricht seiner Länge.

$$\text{Beispiel: } |\mathbf{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}.$$

Vektorsumme und Vektordifferenz

Zu dem in der Abb. 3.20 skizzierten Experiment werden die Geschwindigkeiten $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ angegeben. Ihnen werden Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{u} = \{u_1; u_2\}$; $\mathbf{v} = \{v_1; v_2\}$; $\mathbf{w} = \{w_1; w_2\}$ und Impulsvektoren $\{m_G \cdot \mathbf{u}_1; m_G \cdot \mathbf{u}_2\}$; $\{m_W \cdot \mathbf{v}_1; m_W \cdot \mathbf{v}_2\}$; $\{(m_G + m_W) \cdot \mathbf{w}_1; (m_G + m_W) \cdot \mathbf{w}_2\}$ zugeordnet.

$\{(m_G + m_W) \cdot \mathbf{w}_1; (m_G + m_W) \cdot \mathbf{w}_2\} = \{m_G \cdot \mathbf{u}_1 + m_W \cdot \mathbf{v}_1; m_G \cdot \mathbf{u}_2 + m_W \cdot \mathbf{v}_2\}$ wird Summe der Vektoren $\{m_G \cdot \mathbf{u}_1; m_G \cdot \mathbf{u}_2\}$ und $\{m_W \cdot \mathbf{v}_1; m_W \cdot \mathbf{v}_2\}$ genannt.

Die Vektorsumme zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ erhält man demnach, indem man die entsprechenden Koordinaten von $\mathbf{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ und $\mathbf{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ addiert.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3\}$$

Der Summenvektor zeigt vom Fuß des Vektors $\mathbf{a}$ zur Spitze des Vektors $\mathbf{b}$, wenn der Fuß von $\mathbf{b}$ die Spitze von $\mathbf{a}$ berührt (siehe Abb.3.23)

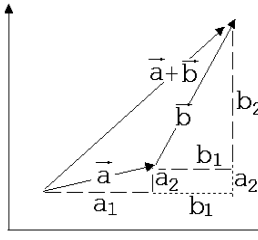


Abb.3.23

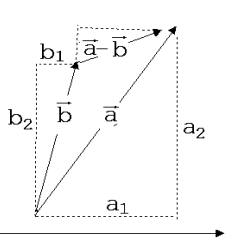


Abb.3.24

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \{a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3\}$ heißt Vektordifferenz. Wenn $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ gleiche Fußpunkte haben, dann stellt ein Pfeil von der Spitze von $\mathbf{b}$ zur Spitze von $\mathbf{a}$ die Vektordifferenz dar (siehe Abb.3.24).

Das Produkt und der Quotient eines Vektors mit einer Zahl

Anstelle von $\{m_G \cdot \mathbf{u}_1; m_G \cdot \mathbf{u}_2\}$ und $\{m_W \cdot \mathbf{v}_1; m_W \cdot \mathbf{v}_2\}$ schreiben wir $m_G \cdot \{u_1; u_2\}$ und $m_W \cdot \{v_1; v_2\}$. Hieran ist erkennbar, wie das Produkt aus einem Vektor $\mathbf{a}$ und einer Zahl z definiert ist.

$$z \cdot \mathbf{a} = z \cdot \{a_1; a_2; a_3\} = \{z \cdot a_1; z \cdot a_2; z \cdot a_3\}$$

Man nennt die hier beschriebene Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl skalare Multiplikation. Sie bewirkt eine Streckung des Vektors $\mathbf{a}$ um z (siehe Abb. 3.25 mit $z=3$).

Bei Anwendung des Impulssatzes auf den Zusammenstoß zweier Körper mit den Massen m_1 und m_2 im Raum mussten bisher drei Gleichungen geschrieben werden:

$$m_1 \cdot \mathbf{v}_1 + m_2 \cdot \mathbf{u}_1 = m_1 \cdot \mathbf{v}_1' + m_2 \cdot \mathbf{u}_1'$$

$$m_1 \cdot \mathbf{v}_2 + m_2 \cdot \mathbf{u}_2 = m_1 \cdot \mathbf{v}_2' + m_2 \cdot \mathbf{u}_2'$$

$$m_1 \cdot \mathbf{v}_3 + m_2 \cdot \mathbf{u}_3 = m_1 \cdot \mathbf{v}_3' + m_2 \cdot \mathbf{u}_3'$$

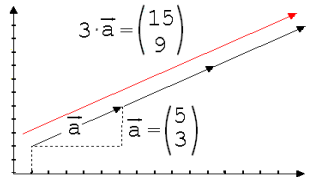


Abb.3.25

$m_1 \cdot v_1$, $m_2 \cdot u_1$, $m_1 \cdot v_1'$ und $m_2 \cdot u_1'$ sind Impulskoordinaten vor und nach dem Stoß.

Für diese drei Gleichungen kann nun die kurze Formulierung gegeben werden:

$$m_1 \cdot \mathbf{v} + m_2 \cdot \mathbf{u} = m_1 \cdot \mathbf{v}' + m_2 \cdot \mathbf{u}'$$

$$\mathbf{v} = \{v_1; v_2; v_3\}, \quad \mathbf{u} = \{u_1; u_2; u_3\}, \quad \mathbf{v}' = \{v'_1; v'_2; v'_3\}, \quad \mathbf{u}' = \{u'_1; u'_2; u'_3\}$$

Von nun an soll das Wort Impuls für einen Impulsvektor $m \cdot \mathbf{v}$ stehen.

Nach der Definition des hier beschriebenen Produkts ist man geneigt, nach einem entsprechenden Quotienten zu fragen. Ein Quotient $\mathbf{a}/m$ (Vektor $\mathbf{a}$ durch eine Zahl m) soll so beschaffen sein, dass folgendes gilt: $(\mathbf{a}/m) \cdot m = \mathbf{a}$. $(1/m) \cdot \mathbf{a}$ hat die Eigenschaft eines solchen Quotienten.

Teilt man einen Vektor $\mathbf{a}$ durch seinen Betrag $|\mathbf{a}|$, dann erhält man einen Einheitsvektor, einen Vektor mit dem Betrag 1.

$$\text{Beispiel: } \mathbf{a} = \{4; 3\}; |\mathbf{a}| = \sqrt{16+9} = 5 \rightarrow \mathbf{a}/|\mathbf{a}| = \{4/5; 3/5\}$$

Das Skalarprodukt

Bei dem in der Abb.3.20 skizzierten Experiment hat der Wagen vor dem Einschlag der Kugel die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ und nach dem Einschlag die Geschwindigkeit $\mathbf{w}$. Der Winkel γ , den die Vektoren $\mathbf{w}$ und $\mathbf{v}$ einschließen, beschreibt die Richtungsänderung des Wagens infolge des Einschlags.

Wie groß ist γ ?

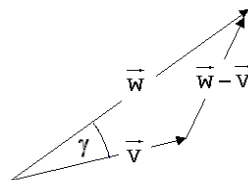


Abb.3.26

Nach dem Kosinussatz gilt: $|\mathbf{w}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{w}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2 \cdot |\mathbf{w}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos(\gamma)$

$$(w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2 + (w_3 - v_3)^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2 \cdot |\mathbf{w}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos(\gamma)$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &\{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\} - 2 \cdot w_1 \cdot v_1 - 2 \cdot w_2 \cdot v_2 - 2 \cdot w_3 \cdot v_3 = \\ &= \{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\} - 2 \cdot |\mathbf{w}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos(\gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ w_1 \cdot v_1 + w_2 \cdot v_2 + w_3 \cdot v_3 &= |\mathbf{w}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos(\gamma) \rightarrow \cos(\gamma) = (w_1 \cdot v_1 + w_2 \cdot v_2 + w_3 \cdot v_3) / (|\mathbf{w}| \cdot |\mathbf{v}|) \end{aligned}$$

$w_1 \cdot v_1 + w_2 \cdot v_2 + w_3 \cdot v_3$ heißt Skalarprodukt $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ der Vektoren $\mathbf{w}$ und $\mathbf{v}$.

Unter dem Skalarprodukt zweier beliebiger Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ versteht man die Summe aus den Produkten entsprechender Koordinaten.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Das Skalarprodukt gleicht dem Produkt der Vektorbeträge und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels $(w_1 \cdot v_1 + w_2 \cdot v_2 + w_3 \cdot v_3) = |\mathbf{w}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos(\gamma)$.

Anmerkung zum räumlichen Koordinatensystem (Rechtssystem)

Die Koordinaten eines Punktes oder eines Vektors sind normalerweise einem Rechtssystem zuzuordnen.

Dessen Eigenschaften sind: Die x, y und z-Achse verhalten sich ihrer Richtung nach wie der Daumen, der Zeige- und der Mittelfinger der rechten Hand, wenn der Mittelfinger von den beiden anderen rechtwinklig abgespreizt ist (siehe Abb.3.27).

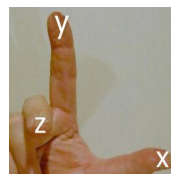


Abb.3.27

3.6 Definition der Kraft und des Kraftmaßes

Da in einem abgeschlossenen System die Summe aus den Impulsen der Systemteile konstant ist, können wir eine Impulsänderung immer auf eine äußere Einwirkung, eine Kraft, zurückführen.

Erfährt ein Gegenstand A unter Einwirkung eines Gebildes B eine Impulsänderung, wenn keine Bewegungshemmnisse vorhanden sind, dann sagt man, B übe eine Kraft F (Force) auf A aus.

Wenn der Impulssatz nicht gelten würde, dann wäre selbst bei einem einzigen Teilchen eine Impulsänderung nicht als Zeichen einer äußeren Einwirkung zu deuten. Die Summe aus den Impulsen seiner Atome könnte schwanken, was nicht ohne Einfluss auf die Teilchengeschwindigkeit bliebe.

Wie wird ein beweglicher Gegenstand unter einer gleichbleibenden **Kraft** angetrieben ? Eine Antwort dazu finden wir mit dem folgenden Experiment.



Abb. 3.28

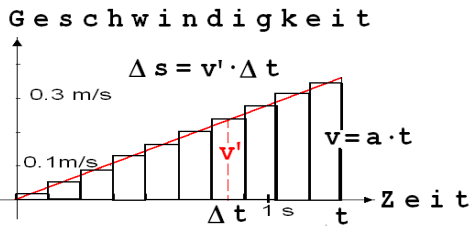


Abb.3.29

Auf der ebenen Glasplatte der Wippe wird ein Experimentierwagen vom Luftstrom eines dem Wagen nachgeführten Föhns angetrieben. Die Impulsänderung des Wagens ist der Zeit des Anblasens proportional, denn die aus dem Föhn strömende Luft erfährt am Wagen in gleichen Zeiten Δt gleiche Impulsänderungen entgegen der Fahrtrichtung, welche nach dem Impulssatz dem Betrage nach gleiche Impulsänderungen des Wagens in Fahrtrichtung zur Folge haben.

Demnach ist der Impuls $m \cdot v$ und somit auch die Geschwindigkeit v des Wagens der Zeit t des Anblasens proportional. **Das konstante Verhältnis v/t wird Beschleunigung a genannt.** Die Beschleunigung a beschreibt die Geschwindigkeitszunahme in einer Zeiteinheit unter der Voraussetzung, dass sich während dieser Zeiteinheit an der Ursache der Beschleunigung nichts ändert.

$$v / t = a \rightarrow v = a \cdot t$$

Da mit der Experimentierwippe kein v - t -Diagramm, sondern nur ein Weg-Zeit-Diagramm aufgenommen werden kann, stellt sich folgende Frage: Wie ist ein Weg-Zeit-Diagramm beschaffen, wenn $v = a \cdot t$ gilt? Anhand eines beliebig gewählten linearen v - t -Diagramms nach $v = a \cdot t$ (siehe roter Graph in der Abb.3.29) kann gezeigt werden, wie der zurückgelegte Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t bestimmt werden kann.

Die Beschleunigungszeit t ist in viele kleine Zeitabschnitte gleicher Größe Δt eingeteilt. Die Wegänderung Δs in einem solchen Abschnitt erhält man mit $\Delta s = v' \cdot \Delta t$. v' ist die Geschwindigkeit in der Mitte von Δt . Wenn im Diagramm zur Darstellung von 1 s und 1m/s jeweils 1cm gewählt wird, dann stimmt $\Delta s = v' \cdot \Delta t$ zahlenmäßig mit dem Flächeninhalt des über Δt sichtbaren Rechtecks überein und der gesamte Weg s , die Summe aller Δs , wird durch den Flächeninhalt des Dreiecks unter dem v - t -Diagramm beschrieben.

$$s = (a \cdot t) \cdot t / 2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

In der Abb. 3.30 ist ein s-t-Diagramm zu sehen, welches während des in der Abb. 3.28 dargestellten Experiments aufgenommen wurde. 2,2 Sekunden nach Beginn der Bewegung wurde der Föhn vom Wagen abgedreht. Die Bewegung wurde daraufhin gleichförmig, was an der linearen Fortsetzung des s-t-Diagramms erkennbar ist. An dem linearen Teil des Diagramms kann die Geschwindigkeit 0,164 m/s zum Zeitpunkt 2,2 s bestimmt werden.

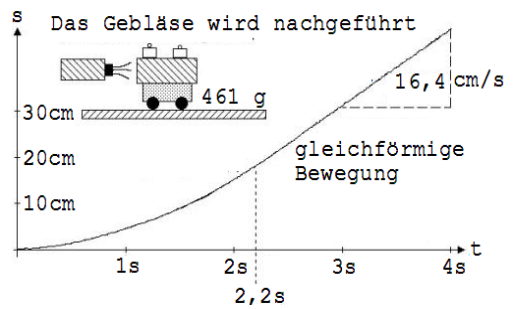


Abb.3.30

Die Beschleunigung a ist demnach $(0,164\text{ m/s}) / 2,2\text{ s} = 0,074\text{ m/s}^2$. Der Kurvenverlauf innerhalb der ersten 2,2 s wird genau durch die Funktion $s = \frac{1}{2} \cdot (0,074\text{ m/s}^2) \cdot t^2$ beschrieben. Somit ist bestätigt, dass während des in der Abb. 3.28 gezeigten Versuchs die Geschwindigkeit der Zeit proportional zunimmt. Man spricht in einem solchen Fall von einer gleichförmig - beschleunigten Bewegung.

Der Wagen mit der Masse 461 g hat nach $2,2\text{ s}$ den Impuls $0,461\text{ kg} \cdot 0,164\text{ m/s} = 0,076\text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Wenn es um ein geeignetes Maß für die Stärke des Luftstroms geht, dann muss man feststellen, dass die Impulsänderung allein als Maß für die Stärke des Luftstroms ungeeignet ist, denn bei schwachem Strom erreicht der Experimentierwagen auch eine große Impulsänderung, wenn man sich genügend Zeit lässt. Je kürzer die Zeit Δt für ein bestimmtes $\Delta(m \cdot v)$ ist, desto stärker ist der Luftstrom. $\Delta(m \cdot v) / \Delta t$ erscheint somit als passendes Maß für die Kraft F . Während des hier beschriebenen Experiments wirkte die Kraft $F = (0,076\text{ kg} \cdot \text{m/s}) / 2,2\text{ s} = 0,034\text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$. Die Einheit $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ wird Newton (Abkürzung: N) genannt. Mit dem Anhängsel $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ (Einheit der Kraft) wird zum Ausdruck gebracht, wie und in welchen Einheiten die zugehörigen Größen verrechnet werden. Der Leser sollte nicht versuchen, diese Einheit zu veranschaulichen, wie dies zum Beispiel bei den Grundeinheiten Meter oder Kilogramm möglich ist.

Wenn $\Delta(m \cdot v) / \Delta t$ konstant ist, dann ist die Impulsänderung der Beschleunigungszeit proportional. Man kann deshalb sagen: $F = \Delta(m \cdot v) / \Delta t$ steht für die Änderung des Impulses während einer Zeiteinheit unter der Voraussetzung, dass $\Delta(m \cdot v) / \Delta t$ in dieser Zeit konstant gehalten wird.

Nach Einführung des Kraftmaßes ist man geneigt, nach den Kräften zu fragen, die von verschiedenen Dingen z.B. von gedehnten Schraubenfedern (Gummifäden) ausgehen. In Abb. 3.31 ist dargestellt, wie man entsprechend der Definition des Kraftmaßes die Kraft einer gedehnten Schraubenfeder oder eines gedehnten Gummifadens ermitteln kann.

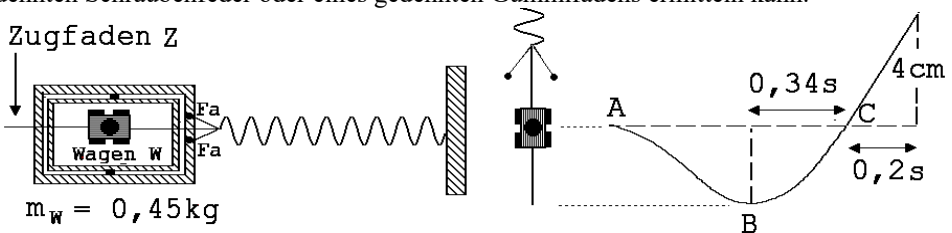


Abb.3.31

Ein auf der Wippe stehender Experimentierwagen W der Masse m ist mit einer langen von

0,2 m auf 0,7m gedehnten Schraubenfeder (Gummifaden) verbunden. Mit Hilfe des Zugfadens Z wird der Wagen ein wenig nach links gezogen und danach losgelassen. Ein Faden Fa, der beiderseits am äußeren Rahmen der Wippe befestigt ist, schränkt die Bewegungsfreiheit der Feder auf etwa 5 cm ein. Unter Einwirkung der Schraubenfeder (Gummifaden) schnellte der Wagen nach rechts (an den Reibungsausgleich denken). Der Rechner zeichnet hierbei ein s-t-Diagramm zur Bewegung des Wagens W. Der Punkt A dieses Diagramms kennzeichnet den Anfangszustand. Bei B wird der Wagen freigegeben. Bei C ist die Feder wieder in ihrer Anfangslage; die Schraubenfeder (Gummifaden) wird dann von dem gespannten Faden Fa gehalten und wirkt deshalb nicht mehr auf den Wagen ein. Der sich an C anschließende Teil des Diagramms beschreibt eine gleichförmige Bewegung. Aus seiner Steigung kann die Endgeschwindigkeit Δv des Wagens (Geschwindigkeitsänderung des Wagens nach seiner Freigabe) bestimmt werden. Die Wirkungszeit Δt der Schraubenfeder (Beschleunigungszeit) ist gleich dem zeitlichen Abstand der Punkte B und C. Anhand der am Diagramm ablesbaren Werte erhält man für die Kraft: $F = (0,45 \text{ kg} \cdot 0,2 \text{ m/s}) / 0,34 \text{ s} = 0,26 \text{ N}$.

Folgendes ist zu beachten: Die Masse der Schraubenfeder sollte im Vergleich zur Wagenmasse vernachlässigbar klein sein. Andernfalls hätte auch die Masse der Feder einen messbaren Einfluss auf die Impulsänderung des Wagens. Gummifäden eignen sich für diesen Versuch besser als Schraubenfedern.

In der nächsten Abb.3.32 ist ein von **A** nach **B** fliegender Körper K der Masse m zu sehen, der von der Seite her angeweht wird. Hierbei ändert K seine Geschwindigkeit in Windrichtung nicht aber quer zu ihr. Die auf K wirkende Kraft erkennt man an K', der orthogonalen Projektion von K auf eine zur Windrichtung parallele Strecke. Die Geschwindigkeit von K' ist v' .

$F = \Delta(m \cdot v') / \Delta t$
 erscheint als passendes Maß für die Kraft. Die orthogonale Projektion K' von K auf eine zur Windrichtung quer liegende Ebene bewegt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit v_0 . v_0 ist die Geschwindigkeit von K bei **A**.

Es ist erkennbar:

$$\Delta(m \cdot v') = |\Delta(m \cdot v)|$$

$$\Delta(m \cdot v) = m \cdot v - m \cdot v_0$$

$\Delta(m \cdot v) / \Delta t$ ist ein in die Richtung der Kraft weisender Vektor, der mit seinem Betrag die Stärke der Kraft anzeigt. Er heißt dementsprechend Kraftvektor. Wenn die Masse m sich nicht ändert, dann kann für **F** geschrieben werden:

$$\mathbf{F} = m \cdot \Delta \mathbf{v} / \Delta t, \quad \Delta \mathbf{v} / \Delta t = \mathbf{a} \quad \rightarrow \quad \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}.$$

$\Delta \mathbf{v} / \Delta t$ heißt Beschleunigungsvektor **a**. Er zeigt in die Richtung, in der K beschleunigt wird und gibt mit seinem Betrag die Beschleunigungswert a von K' an.

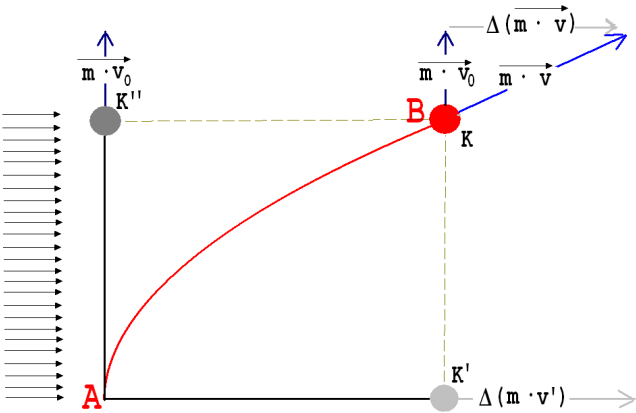


Abb.3.32

3.7 Die Momentangeschwindigkeit

Bei dem in Abb.3.28 dargestellten Experiment wurde die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 2,2 s unterbrochen, damit dann an einer gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit v zu diesem Zeitpunkt bestimmt werden kann.

Kann man an einem s-t- Diagramm die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t auch auf andere Weise bestimmen ?

Folgendes Vorgehen erscheint angemessen. Es wird die Strecke Δs bestimmt, die während eines kurzen, auf den Zeitpunkt t folgenden Zeitabschnitts Δt zurückgelegt wird. Δt wird so klein gewählt, dass sich in dieser kurzen Zeit die Kraft nur wenig auf die Bewegung auswirken kann, weshalb $\Delta s/\Delta t$ kaum von der Geschwindigkeit v abweicht, die sich einstellt, wenn nach t keine Kraft wirkt. Die Abweichung $|\Delta s/\Delta t - v|$ strebt mit kleiner werdendem Δt gegen 0. Man sagt in diesem Fall, v ist der Grenzwert von $\Delta s/\Delta t$ für $\Delta t \rightarrow 0$.

An der Bilderserie in Abb. 3.33 ist die Entwicklung zu dem genannten Grenzwert v zu erkennen. Durch Anfang und Ende von Kurvenabschnitten, die in Zeitintervallen Δt unmittelbar nach dem Zeitpunkt $t = 1$ s entstehen, werden Geraden gelegt. Die Steigung einer Geraden ist gleich dem Quotienten $\Delta s/\Delta t$. Mit kleiner werdendem Δt streben die Geraden gegen eine Grenzlage. Eine Gerade in dieser Grenzlage wird Tangente (Berührungsgerade) genannt. Ihre Steigung ist gleich der Momentangeschwindigkeit v . Für den Grenzwert von $\Delta s/\Delta t$ schreibt man $\lim \Delta s/\Delta t_{(\Delta t \rightarrow 0)}$ oder ds/dt (sprich ds nach dt). Mit der Sprechweise „ ds nach dt “ anstelle von „ ds durch dt “ soll vermieden werden, dass dieser Grenzwert (Differentialquotient) als Quotient bestimmter endlicher Größen aufgefasst wird. $\lim$ ist eine Abkürzung für Limes (Grenze).

Als **Momentangeschwindigkeit** v zu einem bestimmten Zeitpunkt t wird der Grenzwert von $\Delta s/\Delta t$ definiert.

$$v = \lim \Delta s/\Delta t_{(\Delta t \rightarrow 0)}$$

$$\lim \Delta s/\Delta t_{(\Delta t \rightarrow 0)} = ds/dt$$

$$v = ds/dt$$

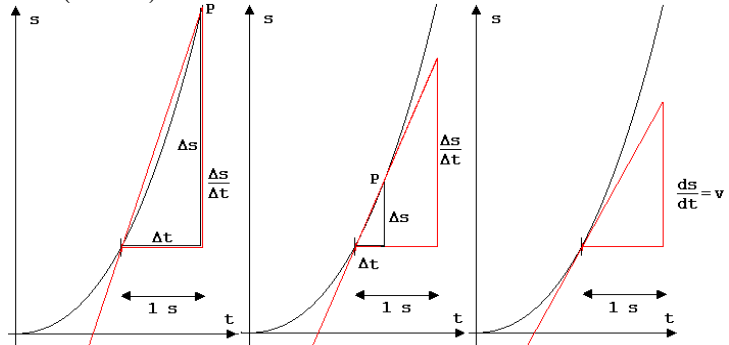


Abb. 3.33

Zu einer Bewegung nach $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ kann die Momentangeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit t berechnet werden. Nach $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ gilt für die mittlere Geschwindigkeit v_m in einem Zeitabschnitt zwischen den Zeiten t und t' ($t < t'$) :

$$\Delta s = (\frac{1}{2} \cdot a \cdot t'^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2), \quad \Delta t = (t' - t), \quad v_m = \Delta s / \Delta t$$

$$v_m = (\frac{1}{2} \cdot a \cdot t'^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2) / (t' - t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t'^2 - t^2) / (t' - t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t' + t)$$

$$(t'^2 - t^2) = (t' + t) \cdot (t' - t) !$$

Unter einer mittleren Geschwindigkeit $v_m = s/t$ verstehen wir das Verhältnis aus einem zurückgelegten Weg s und der zugehörigen Zeit t . Diese Definition ist an keinen besonderen Bewegungsablauf geknüpft; die Bewegung kann in der Zeit t langsamer oder schneller werden. Lässt man t' schrittweise näher an t heranrücken, somit Δt immer kleiner werden,

dann strebt $v_m = \Delta s / \Delta t$ gegen den Wert $\frac{1}{2} \cdot a \cdot (t' + t) = a \cdot t$.

$$v \text{ (Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt } t) = ds/dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s / \Delta t = a \cdot t$$

Nach $v_m = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t' + t) = \frac{1}{2} \cdot (a \cdot t' + a \cdot t)$ ist die mittlere Geschwindigkeit in einem Zeitabschnitt gleich dem Mittelwert aus der End- und Anfangsgeschwindigkeit $v_{t'} = a \cdot t'$ und $v_t = a \cdot t$.

Hier ist anzumerken, dass der Satz **„Die mittlere Geschwindigkeit ist der Mittelwert aus der Anfangs- und Endgeschwindigkeit“** nur bei einer gleichförmig - beschleunigten Bewegung gilt.

Es stellt sich nun die Frage, welche der uns bekannten Bewegungen als gleichförmig-beschleunigt anzusehen sind. In Frage kommt z.B. die Fallbewegung eines Körpers. Wir werden diese Bewegung daraufhin untersuchen.

Aufgaben

1. Ein zunächst gleichförmig mit $v_0 = 0,5 \text{ m/s}$ über eine waagrechte Ebene rollender Wagen der Masse $m = 200 \text{ g}$ wird durch ein Gebläse $\Delta t = 4 \text{ s}$ lang mit $F = 0,3 \text{ N}$ in Fahrtrichtung beschleunigt.

Welche Geschwindigkeit hat der Wagen nach dem Beschleunigungsvorgang ?

2. Ein Experimentierwagen mit $m_w = 300 \text{ g}$ trifft auf ebener Fahrbahn mit $v_0 = 3 \text{ m/s}$ auf einen $m_B = 100 \text{ g}$ schweren Bremsklotz und schiebt diesen während des Bremsvorgangs der Dauer Δt vor sich her. Die Bremskraft der Ebene gegen den Klotz beträgt $0,5 \text{ N}$.

Wie groß ist Δt ?

3.8 Der Freie Fall (Gewichtskraft)

Fallen Körper je nach Masse unterschiedlich schnell ? Ein „ja“ liegt nahe, wenn man daran denkt, dass Papierschnipsel deutlich langsamer fallen als Steine.

Ein fallendes Stück Papier wird jedoch auffällig von der Luft in seinem Verhalten beeinflusst und es liegt die Vermutung nahe, dass sein langsames Fallen auf den Luftwiderstand zurückzuführen ist, der sich bei ihm stärker auswirkt als bei einem Stein. Fallversuche in einer luftleeren Röhre bestätigen diese Vermutung und so kann man sagen: **Alle Körper fallen im luftleeren Raum gleich schnell.**

Ist die Fallbewegung gleichförmig beschleunigt?

Zur Beantwortung dieser Frage dient die in der Abb.3.34 skizzierte Versuchsanordnung. Ein 5 kg schwerer Metallzylinder K spult während seines Falls einen Faden von der Welle eines Dynamos (Tachogenerator) ab. Hierbei erzeugt dieser Dynamo einen elektrischen Strom, dessen Stärke der Geschwindigkeit proportional ist. Die Masse von K ist so gewählt, dass sich die hemmende Kraft des Dynamos nicht merkbar auswirkt. Während des Falls wird die Stromstärke des Dynamos in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt. Es entsteht ein lineares

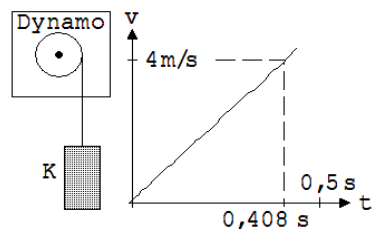


Abb. 3.34

Diagramm. Den Stromstärken werden die entsprechenden Geschwindigkeiten v zugeordnet.

Aus dem gegebenen Diagramm wird so ein v-t-Diagramm. Die Steigung $v / t = a$ ist die Beschleunigung. **9,8 m/s² kann abgelesen werden.** Genauere Messungen ergeben für die ortsabhängige Fallbeschleunigung g den Wert 9,81 m/s².

Aus $v = g \cdot t$ folgt: $s = (g / 2) \cdot t^2$ Galileis Fallgesetz

Die von der Erde ausgeübte Kraft heißt Gewichtskraft F_G . $F_G = m \cdot a = m \cdot g$ ist der Masse proportional, denn g ist nicht von der Masse abhängig. Auf einen Körper der Masse 1kg wirkt die Kraft $F = 1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 9,81 \text{ N}$.

3.9 Bewegung eines Läufers (Momentanbeschleunigung)

Wie bewegt sich ein Rennläufer beim Start ?

Zur Beantwortung dieser Frage dient die in der Abb.3.35 sichtbare Messanordnung. Ein Läufer (65 kg schwerer Sportler) spult von der Welle eines Dynamos einen Faden ab. Da der elektrische Strom des Dynamos der Stärke nach der Geschwindigkeit des Läufers proportional ist, kann die y-Achse des Koordinatensystems so skaliert werden, dass aus dem Strom-Zeit-Diagramm ein v-t-Diagramm wird.

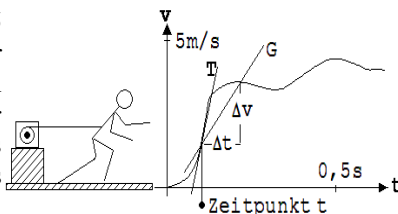


Abb. 3.35

Von Interesse ist die Kraft beim Anlaufen.

Zu ihrer Berechnung muss die Beschleunigung zu einem interessierenden Zeitpunkt t ermittelt werden. Am Diagramm kann die Geschwindigkeitsänderung Δv abgelesen werden, die der Läufer in einem kleinen Zeitabschnitt Δt nach einem Zeitpunkt t erfährt. Der Quotient $\Delta v / \Delta t$ aus dieser Geschwindigkeitsänderung und der zugehörigen Zeit, ist die mittlere Beschleunigung in Δt . In Abb.3.35 sehen wir eine Gerade G, deren Steigung dieser mittleren Beschleunigung gleicht. Da sich die Kraft in Δt ändert, kann aus der mittleren Beschleunigung nicht auf die Kraft F zum Zeitpunkt t geschlossen werden. Dies ist nur dann mit einem kleinen Fehler möglich, wenn Δt so klein gemacht wird, dass nur mit einer geringen Kraftänderung in diesem Zeitintervall zu rechnen ist (stetige Kraftänderung wird vorausgesetzt). Lässt man zur Verminderung des genannten Fehlers das Zeitintervall Δt nach und nach gegen 0 gehen, dann strebt die mittlere Beschleunigung gegen einen Grenzwert. Dieser Grenzwert $\lim \Delta v / \Delta t (\Delta t \rightarrow 0)$ wird als **Momentanbeschleunigung** a zum Zeitpunkt t bezeichnet.

Bei Verkleinerung von Δt wird die Gerade G in eine Grenzlage gedreht. In dieser Grenzlage heißt sie Tangente T. Anhand der Tangentensteigung kann die Momentanbeschleunigung a bestimmt werden. Mit $F = m \cdot a$ erhält man die Kraft zum Zeitpunkt t.

Für $\lim \Delta v / \Delta t (\Delta t \rightarrow 0) = a$ schreiben wir dv/dt (sprich dv nach dt). Der Momentanbeschleunigung a ordnen wir den Vektor $\mathbf{a} = \{ dv_1 / dt ; dv_2 / dt ; dv_3 / dt \}$ zu.

Vom v-t-Diagramm zum a-t-Diagramm

Beschleunigungen können am v-t-Diagramm ermittelt werden. Man erhält sie, indem man Tangenten anlegt und deren Steigung bestimmt. Das in Abb.3.36 sichtbare Diagramm zeigt neben dem v-t-Diagramm eines Rennläufers das zugehörige a-t-Diagramm. Es fällt die erstaunlich hohe Anfangsbeschleunigung auf. Auf den 65 kg schweren Läufer (Leistungssportler) wirkten kurzzeitig etwa 4500 N.

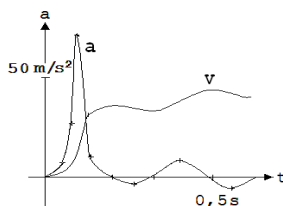


Abb.3.36

3.10 Über den Umgang mit Einheiten

Es gibt bekanntlich Grundeinheiten wie m, s und kg und solche Einheiten, die von diesen Grundeinheiten abgeleitet werden, z.B. $\text{cm} = 0,01 \text{ m}$, m/s , m/s^2 , $\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$ usw.. Unter den Einheiten kg, m und s kann man sich noch etwas vorstellen. Anders verhält es sich mit m/s^2 und $\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$. Diese Einheiten sind formaler Natur. m/s^2 und $\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$ sollen darüber informieren, welche Größen in eine Rechnung eingehen und wie sie miteinander verknüpft werden. Zu unserer Verwunderung finden wir Angaben wie $2\cdot\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$ und $200000\cdot\text{g}\cdot\text{cm/s}^2$. Die Einheiten werden wie Variablen behandelt. Zum Verständnis dieser Darstellung sollte man sich unter m, kg und s jeweils die Zahl 1 und unter cm, g, und h (Stunde) $1/100$, $1/1000$ und 3600 vorstellen.

Hiernach ist es gleichgültig ob man den Wert einer Kraft z.B. $2\cdot\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$ in der hier angegebenen Form oder aber in der Form $200000\cdot\text{g}\cdot\text{cm/s}^2$ in eine Gleichung einsetzt. Das Produkt aus Zahlenwert und Einheit ist in beiden Fällen gleich groß. Entsprechendes gilt für andere Größen. Wenn in einer Gleichung gleichen Größen gleiche Einheiten zugewiesen werden, dann kann man alle diese Einheiten als Vertreter der Zahl 1 ansehen. Daraus folgt, dass in diesem Fall die Gleichung auch dann gültig ist, wenn die Einheiten weggelassen werden. Nach der Streichung der Einheiten liegt eine sogenannte Zahlenwertgleichung vor. **Zahlenwertgleichungen sind unüblich, denn es soll immer deutlich bleiben, mit welchen Größen und Einheiten gearbeitet wird. Außerdem kann man oft Rechenfehler an den während der Rechnung auftretenden Einheiten erkennen. Wenn z.B. in einer Summe Summanden mit verschiedenen Einheiten auftreten, dann ist damit ein Hinweis auf einen Fehler gegeben.**

Mit Hilfe von Einheiten können Gesetze vermutet werden.

Beispiel 1:

Wir wissen, dass auf einen gleichförmig kreisenden Körper eine zum Drehpunkt gerichtete Kraft wirkt. Wir vermuten, dass diese Kraft F von der Masse m des Körpers, seiner Geschwindigkeit v und dem Bahnradius r abhängig ist.

v , r und m müssen so verknüpft werden, dass ein Term mit der Einheit $\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$ (N) entsteht.

$[m] = \text{kg}$; m mit eckigen Klammern heißt Einheit von m

$$[v] = \text{m/s}; \quad [r] = \text{m} \quad \rightarrow \quad [v^2 \cdot m/r] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Dies gibt Anlass zur Vermutung: $F = v^2 \cdot m/r$

Beispiel 2:

Es wird angenommen, dass die Schallgeschwindigkeit v durch die Luftdichte ρ und den Luftdruck p bestimmt ist.

$$[\rho] = \text{kg/m}^3; [p] = \text{kg/(m}\cdot\text{s}^2); [p/\rho] = \text{m}^2/\text{s}^2 \quad \rightarrow \quad \text{Vermutung: } v \sim \sqrt{p/\rho}$$

4. Bewegung unter einer nach Richtung und Betrag konstanten Kraft

Es gibt eine Vielzahl von Bewegungen, die unter konstanter Kraft ablaufen. Man denke zum Beispiel an einen Wagen auf einer schiefen Ebene, an das Abbremsen eines Autos oder den Wurf eines Körpers.

Zunächst werden geradlinige Bewegungen unter konstanter Kraft behandelt.

Man stelle sich einen Körper K der Masse m vor, der unter einer Kraft F entlang der x -Achse bewegt wird (siehe Abb.4.1). Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde er sich am Ort x_0 und habe die Anfangsgeschwindigkeit $v_{1,0}$.

Beachte: Kräfte, Beschleunigungen und Geschwindigkeiten in x -Richtung erhalten den Zeiger (Index) 1!

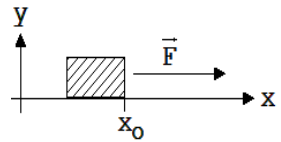


Abb.4.1

Welche Geschwindigkeit v_1 hat der Körper zu einem späteren Zeitpunkt t ?

$$\text{Es gilt: } F_1 = m \cdot a_1 \rightarrow a_1 = F_1 / m$$

Da die Beschleunigung konstant ist, gehören zu gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeitsänderungen. Die Änderung der Geschwindigkeit $v_1 - v_{1,0}$ ist der Zeit t proportional.

$$(v_1 - v_{1,0}) / t = a_1 \rightarrow v_1 = a_1 \cdot t + v_{1,0}$$

Welchen x -Wert hat der Körper zum Zeitpunkt t ? Bei konstanter Beschleunigung ist die mittlere Geschwindigkeit gleich dem Mittelwert aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit.

$$(x - x_0) / t = (v_1 + v_{1,0}) / 2 ; \quad v_1 = a_1 \cdot t + v_{1,0}$$

$$(x - x_0) / t = [(a_1 \cdot t + v_{1,0}) + v_{1,0}] / 2 = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t + v_{1,0} \rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 + v_{1,0} \cdot t + x_0$$

Bei einer räumlichen Bewegung von K erhält man für dessen Projektionen P_1 , P_2 , und P_3 auf die Achsen des Koordinatensystems:

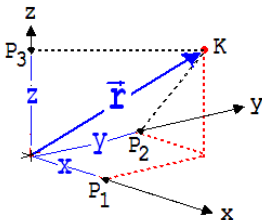


Abb.4.2

$$v_1 = a_1 \cdot t + v_{1,0} ; \quad x = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 + v_{1,0} \cdot t + x_0$$

$$v_2 = a_2 \cdot t + v_{2,0} ; \quad y = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2 + v_{2,0} \cdot t + y_0$$

$$v_3 = a_3 \cdot t + v_{3,0} ; \quad z = \frac{1}{2} \cdot a_3 \cdot t^2 + v_{3,0} \cdot t + z_0$$

$v_{1,0}, v_{2,0}, v_{3,0}$: Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt $t = 0$

x_0, y_0, z_0 : Koordinaten von K zum Zeitpunkt $t = 0$.

Die Beschleunigungen können bei konstanter Masse aus den Kraftkomponenten $F_1 = m \cdot a_1$, $F_2 = m \cdot a_2$, $F_3 = m \cdot a_3$ bestimmt werden.

Die zuletzt angegebenen Gleichungen werden zu Vektorgleichungen zusammengefasst.

$$\{v_1 ; v_2 ; v_3\} = \{a_1 ; a_2 ; a_3\} \cdot t + \{v_{1,0} ; v_{2,0} ; v_{3,0}\}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot t + \mathbf{v}_0$$

$$\{x ; y ; z\} = \frac{1}{2} \cdot \{a_1 ; a_2 ; a_3\} \cdot t^2 + \{v_{1,0} ; v_{2,0} ; v_{3,0}\} \cdot t + \{x_0 ; y_0 ; z_0\}$$

$$\mathbf{r} = \{x ; y ; z\}, \quad \mathbf{v}_0 = \{v_{1,0} ; v_{2,0} ; v_{3,0}\}, \quad \mathbf{r}_0 = \{x_0 ; y_0 ; z_0\}$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{a} \cdot t^2 + \mathbf{v}_0 \cdot t + \mathbf{r}_0$$

Wirkt keine Kraft ($\mathbf{a} = \mathbf{0}$), dann verläuft die Bewegung gleichförmig nach $\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 \cdot t + \mathbf{r}_0$.

K weicht zum Zeitpunkt t um $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{a} \cdot t^2$ von dem Ort P' ab, den K bei fehlender Kraft genau dann erreicht hätte.

Der Wurf als Beispiel

Für die Bewegung unter einer konstanten Kraft $\mathbf{F}$ gelten die folgenden Gleichungen:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot t + \mathbf{v}_0 ; \quad \mathbf{r} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{a} \cdot t^2 + \mathbf{v}_0 \cdot t + \mathbf{r}_0 ; \quad \mathbf{a} = \mathbf{F} / m$$

$\mathbf{v}_0$: Vektor der Anfangsgeschwindigkeit, $\mathbf{r}_0$: Ortsvektor der Startpunktes

Wir gehen davon aus, dass die Erdanziehungskraft auf einen hoch geworfenen Körper K eine konstante, nach unten gerichtete Kraft $\mathbf{F}$ ist und dass ihr demnach ein konstanter, nach unten gerichteter Beschleunigungsvektor $\mathbf{a}$ zugeordnet werden kann. In dem zur Beschreibung des Wurfs angelegten Koordinatensystem in der Abb.4.3 mit einer nach oben gerichteten y-Achse ist $\mathbf{a} = \{0, -g, 0\}$. $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ist der Betrag der Erdbeschleunigung. Für die in der x-y-Ebene liegenden Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{v}$ gilt:

$$\mathbf{r} = \{x; y; z\} = \frac{1}{2} \cdot \{0; -g; 0\} \cdot t^2 + \{v_{0,1}; v_{0,2}; 0\} \cdot t + \{x_0; y_0; 0\}$$

$$\mathbf{v} = \{v_1; v_2; 0\} = \{0; -g; 0\} \cdot t + \{v_{0,1}; v_{0,2}; 0\}$$

In diesem Fall können die z-Koordinaten unbeachtet bleiben.

$$x = v_{0,1} \cdot t + x_0, \quad y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{0,2} \cdot t + y_0$$

$$v_1 = v_{0,1}, \quad v_2 = -g \cdot t + v_{0,2}$$

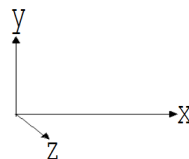


Abb.4.3

Bei fehlender äußerer Kraft ($\mathbf{a} = 0$) würde sich K nach $\{x; y\} = \{v_{0,1}; v_{0,2}\} \cdot t + \{x_0; y_0\}$ bewegen und in der Zeit t mit konstanter Geschwindigkeit einen Punkt P' erreichen (siehe Abb.4.4). Stattdessen gelangt K in dieser Zeit zu einem Punkt P, der $g \cdot t^2 / 2$ unter P' liegt.

Mit der in der Abb.4.5 skizzierten Anordnung werden die Bewegungsgleichungen an einem Wurf überprüft. Mit einer Federkanone wird eine an einem Elektromagneten hängende Eisenkugel K anvisiert. Mit dem Abschuss wird der Strom durch den Magneten unterbrochen und die Kugel fällt. Das Geschoss G, welches den Lauf der Kanone verlässt, trifft die Kugel.

Erklärung: Bei fehlender Erdanziehungskraft würde das Geschoss G zu einem Zeitpunkt t (Wurfbeginn bei $t = 0$) den Magneten erreichen. Wegen der Kraft $m \cdot g$ ist das Geschoss $\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ tiefer und somit am Ort der fallenden Kugel.

Die Gewichtskraft ist nach Richtung und Betrag konstant, sie ist unabhängig vom Verlauf der Bewegung. Dies ist die Voraussetzung für die Herleitung der Bewegungsgleichungen, für deren Gültigkeit das gerade beschriebene Experiment spricht.

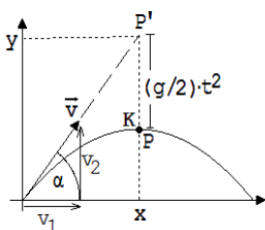


Abb.4.4

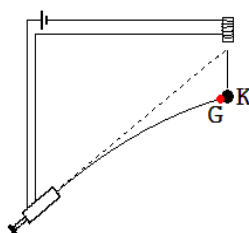


Abb.4.5



Abb.4.6

Die oben angegebenen Gesetze passen auch zu einer Kugel K (siehe Abb.4.7), die über eine schiefe Ebene rollt. Die x und y-Achsen müssen in diesem Fall in die schiefe Ebene gelegt werden und zwar so, dass die x-Achse waagrecht und die y-Achse schräg nach oben weist. Zur Berechnung ist anstelle von g die Beschleunigung einer abwärts rollenden Kugel einzutragen. Die von dem an die Wippe angeschlossenen Rechner geschriebenen Weg-Zeit-Diagramme sind dem Punkt P zuzuordnen, der Projektion der Kugel auf die Längsseite der Wippe. An dem Zeit-Weg-Diagramm ist zu erkennen, dass sich P im 2. Fall (die Schmalseite ist geneigt) erwartungsgemäß gleichförmig und im 1. Fall (die Längsseite ist geneigt) mit einer konstanten Beschleunigung bewegt, die unabhängig ist von der Bewegung in horizontaler Richtung.

Anmerkung für den Experimentator:

Im 2. Fall sind beide Justierschrauben der angehobenen Längsseite unterlegt.

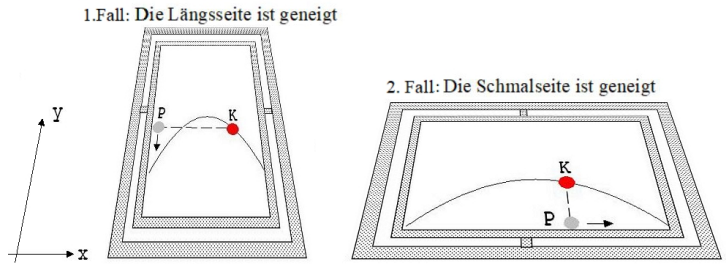


Abb.4.7

Ein Gegenstand K werde mit der Geschwindigkeit v unter dem Höhenwinkel α am Ort $P(0;0)$ nach oben geworfen (siehe Abb.4.4).

Welchen Ort $P(x; y)$ erreicht dieser Gegenstand in einer Zeit t nach dem Abwurf ?

$$v_1/v = \cos(\alpha) \rightarrow v_1 = v \cdot \cos(\alpha), \quad v_2/v = \sin(\alpha) \rightarrow v_2 = v \cdot \sin(\alpha)$$

$$x = t \cdot v \cdot \cos(\alpha), \quad y = t \cdot v \cdot \sin(\alpha) - (g/2) \cdot t^2$$

$x = t \cdot v \cdot \cos(\alpha)$ und $y = t \cdot v \cdot \sin(\alpha)$ sind die Koordinaten des Punktes P' , den K ohne Erdanziehung ($g = 0$) in der Zeit t erreichen würde.

Die Gleichung $x = t \cdot v \cdot \cos(\alpha)$ kann man nach t auflösen und erhält $t = x / [v \cdot \cos(\alpha)]$. Ersetzt man in der für y gültigen Gleichung die Zeit t durch diesen Term, dann wird für die Bahn der Kugel eine quadratische Funktion erhalten, die durch eine Parabel dargestellt wird.

$$y = x \cdot (\sin \alpha / \cos \alpha) - g \cdot x^2 / (2 \cdot v^2 \cdot \cos^2 \alpha)$$

Aufgaben

1. Ein 200 g schwerer Wagen steht auf einer waagrechten Ebene. Vom Wagen geht ein Faden aus, er läuft über eine Rolle abwärts und trägt am anderen Ende ein 20g-Gewicht.

Welche Geschwindigkeit hat der anfänglich ruhende Wagen 3s nach der Freigabe des 20g-Gewichts? Welchen Weg legt er innerhalb von diesen 3 s zurück ?

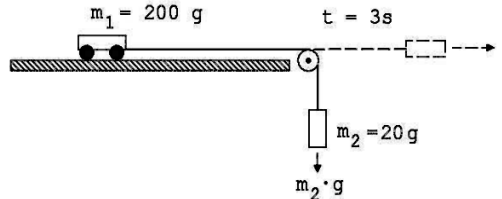


Abb.4.8

Wir gehen davon aus, dass es ohne Bedeutung für die Bewegung des Wagens ist, ob die auf m_2 wirkende Kraft $F = m_2 \cdot g$ nach unten oder seitwärts nach rechts gerichtet ist.

2. Ein Gegenstand wird mit $v_0 = 10$ m/s senkrecht nach oben geworfen. Welche Höhe erreicht er und wie lange dauert der Wurf ?

3. Ein Gegenstand wird mit $v_0 = -5$ m/s von einem $y_0 = 10$ m hohen Turm senkrecht nach unten geworfen.

Wie lange dauert der Wurf und mit welcher Geschwindigkeit schlägt der Gegenstand auf den Boden ?

4. Ein Ball wird mit 15 m/s unter dem Höhenwinkel 45° aus 1,7 m Höhe nach oben geworfen. Welche Höhe erreicht der Ball, wie weit fliegt er, mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Winkel schlägt der Ball auf den Boden ?

5. Bewegung unter einer konstanten Normalkraft

Wenn eine Kraft auf einen Körper K wirkt, erwartet man an K eine Veränderung des Geschwindigkeitsbetrags. Dies ist nicht immer der Fall, z.B. dann nicht, wenn es sich um eine Normalkraft handelt, wenn die Bewegungsrichtung mit der Richtung der Kraft einen rechten Winkel bildet. Man denke an einen Körper der Masse m , der an einem Faden auf einer Kreisbahn geführt wird.

Wir untersuchen nun eine solche Bewegung in der x-y-Ebene unter einer dem Betrage nach konstanten Normalkraft $F = \{F_1; F_2; 0\}$. In der Schule ist die mathematische Behandlung dieser Bewegung nur mit Hilfe eines Rechners möglich. Hierbei wird in folgender Weise vorgegangen:

Die Bewegungszeit wird in sehr kleine Zeitabschnitte Δt zerlegt. Ein Δt ist so klein, dass innerhalb dieses Δt die Kraft nach Richtung und Betrag als konstant angesehen werden kann. Mit den für konstante Kräfte geltenden Bewegungsgleichungen wird die Änderung des Orts und der Geschwindigkeit während des ersten Zeitabschnitts Δt berechnet.

$$a_1 = F_1/m, \quad a_2 = F_2/m$$

F_1, F_2 : Kraftkomponenten während des Zeitabschnitts Δt

a_1, a_2 : Beschleunigungen in x- und y-Richtung

$$v_1 = a_1 \cdot \Delta t + u_1, \quad v_2 = a_2 \cdot \Delta t + u_2$$

u_1, u_2 : Geschwindigkeiten vor Δt

v_1, v_2 : Geschwindigkeiten nach Δt

$$x = 0,5 \cdot a_1 \cdot \Delta t^2 + u_1 \cdot \Delta t + x_0,$$

$$y = 0,5 \cdot a_2 \cdot \Delta t^2 + u_2 \cdot \Delta t + y_0$$

x_0, y_0 : Koordinaten vor Δt

x, y : Ortskoordinaten nach Δt

Nach dieser Rechnung ist der Ort und die Geschwindigkeit zu Beginn des zweiten Abschnitts Δt bekannt. Mit deren Werten wird daraufhin der Ort und die Geschwindigkeit zu Beginn des dritten Abschnitts (nach dem Ende des 2. Abschnitts) berechnet usw..

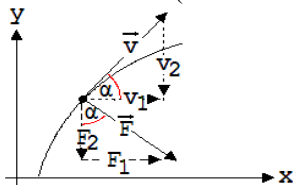


Abb.5.1

Die Koordinaten F_1 und F_2 der dem Betrage nach konstanten Kraft F ($|F| = F$) werden wie folgt bestimmt:

$$F_1 / |F| = v_2 / |v|, \quad - F_2 / |F| = v_1 / |v|$$

$$|F| = F, \quad |v| = v, \quad v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$$F_1 = (v_2/v) \cdot F, \quad F_2 = - (v_1/v) \cdot F$$

Manchmal ist auch eine Angabe über die Bewegungszeit erwünscht. Hat diese vor Δt den Wert t_{vor} , dann ist sie nach Δt gleich $t_{\text{nach}} = t_{\text{vor}} + \Delta t$.

Mit der nachfolgenden Programmzeile, ausführbar in <http://www.g-hoehne.de/Sim.html> (Rechtsklick, in neuem Fenster öffnen) kann die Bewegung unter einer Normalkraft simuliert werden (siehe Abb. 5.2).

$n=2000; k=0,5; h=0,01; m=1; i=\text{wrz}(c^2+d^2); f=k*d/i; q=-k*c/i; a=f/m; b=q/m;$
 $x=0,5*a*h^2+c*h+x; y=0,5*b*h^2+d*h+y; c=c+a*h; d=d+b*h; l=l+1;$

Erläuterung: $k = F, f = F_1, q = F_2, a = a_1, b = a_2, c = v_1, d = v_2, i = v; h = \Delta t$.

Als Anfangswerte von c und y sind die Werte 1,5 und 4,5 in das Variablenfeld von <http://www.g-hoehne.de/Sim.html> (Rechtsklick, in neuem Fenster öffnen) einzutragen.

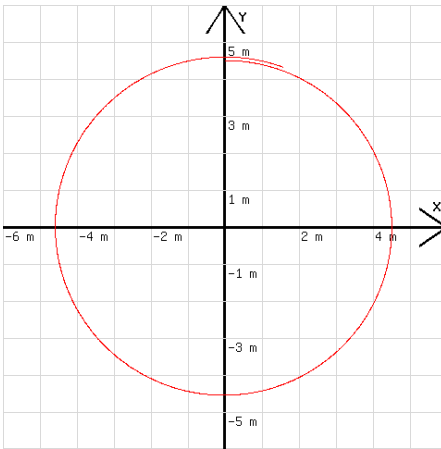


Abb.5.2

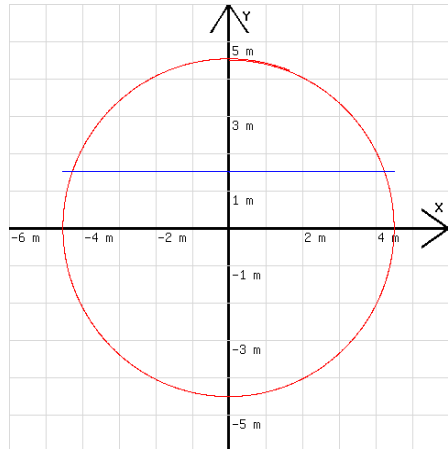


Abb.5.3

Die in der Abb. 5.2 sichtbare Bahn weicht etwas von einer Kreisbahn ab. Dies ist auf Rechengenauigkeiten zurückzuführen. Eine höhere Rechengenauigkeit wird erreicht, wenn zur Berechnung statt der Beschleunigung zu Beginn eines kleinen Zeitabschnitts Δt die Beschleunigung in der Mitte von Δt genommen wird. Für die Änderung Δa der Beschleunigung in $\Delta t/2$ kann geschrieben werden:

$$\Delta a \approx (a_{\text{nach } \Delta t} - a_{\text{vor } \Delta t}) / 2 \rightarrow a_{\text{Mitte}} \approx a_{\text{vor } \Delta t} + (a_{\text{nach } \Delta t} - a_{\text{vor } \Delta t}) / 2$$

Da $a_{\text{nach } \Delta t}$ zunächst unbekannt ist, ist eine solche Korrektur für das erste Δt nicht möglich. Für die folgenden Zeitabschnitte werden die Δa - Werte genommen, die für den jeweils vorangehenden Zeitabschnitt ermittelt wurden.

Mit $a = j * 0,5 * (a - o) + a$; $b = j * 0,5 * (b - p) + b$; wird die Korrektur im folgenden Programm vorgenommen. o (Buchstabe) und p sind Beschleunigungen zu Beginn des vorangehenden Zeitabschnitts Δt . Da solche Werte beim ersten Δt nicht vorliegen, müssen $0,5 * (a - o)$ und $0,5 * (b - p)$ zuallererst unberücksichtigt bleiben. Dies gelingt mit der Variablen j , die zunächst den Wert 0 hat, dann aber nach der ersten Berechnung auf 1 gesetzt wird.

$n=2000; k=0,5; h=0,01; m=1; i=\text{wrz}(c^2+d^2); f=k*d/i; g=-k*c/i; a=f/m; b=g/m; a=j*0,5*(a-o) + a; b=j*0,5*(b-p)+b; x=0,5*a*h^2+c*h+x; y=0,5*b*h^2+d*h+y; c=c+a*h; d=d+b*h; o=a;p=b; w=i; l=l+1; j=1;$

In der Abb.5.3 ist eine Kreisbahn zu sehen, die mit dieser Korrektur gezogen wurde. Neben der Kreisbahn ist noch ein blaues Diagramm zu sehen. Es zeigt $|v| = i = w$ in Abhängigkeit von der x -Koordinate. $|v|$ ist konstant gleich 1,5 m/s.

Die auf den Kreismittelpunkt gerichtete Normalkraft heißt Zentripetalkraft. Der Kreisradius r ist von dieser Kraft F als auch von der Masse m und der Geschwindigkeit v des rotierenden Teilchens abhängig. Für r kommt ein Term mit m , v und F in Frage, dessen Einheit eine Längeneinheit ist. Vermutung: $r = m \cdot v^2 / F$. Werden zu verschiedenen Werten von m , v und F Kreisbahnen gezeichnet, dann erfährt diese Vermutung eine Bestätigung.

Ein Körper bewegt sich in einer Ebene unter einer parallel zur Ebene wirkenden Normalkraft konstanten Betrags mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn. Die auf den Kreismittelpunkt gerichtete Kraft heißt Zentripetalkraft F_z und die zugehörige Beschleunigung Zentripetalbeschleunigung.

Zur experimentellen Ermittlung der Zentripetalbeschleunigung lassen wir eine Kugel auf der Experimentierwippe in einer Schale kreisen (siehe Abb.5.4). Das Diagramm beschreibt den Weg s , den die senkrechte Projektion P des kreisenden Körpers B auf einen durch den Kreismittelpunkt gehenden Pfeil zurücklegt.

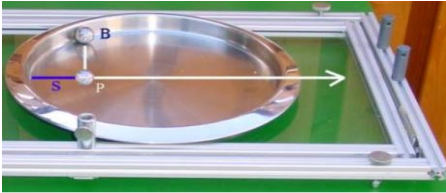


Abb.5.4

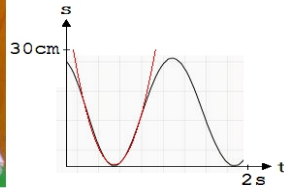


Abb.5.5

Dem Bewegungsdiagramm kann mit dem bekannten Computerprogramm CASSY-LAB der Firma LD-DIDACTIC eine Parabel angepasst und der zu ihr gehörende Funktionsterm bestimmt werden. Für sehr kurze Zeiten t nach der Kehrtwende von P am linken Umkehrpunkt gilt für den Weg s dieses Punktes:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (a = |\mathbf{a}|)$$

Zur Parabel (rot) in der Abb.5.5 wurde $s = (1,51 \text{ m/s}^2) \cdot t^2$ erhalten. Folglich hat die Zentripetalbeschleunigung in dem gegebenen Fall den Wert $3,02 \text{ m/s}^2$.

Maßgebend für die Zentripetalbeschleunigung sind die Geschwindigkeit der kreisenden Kugel und der Radius der Bahn. Die Beschleunigung ist vermutlich gleich v^2/r , denn dieser Term hat wie die Beschleunigung die Dimension Weg/Zeit². Nach den am Diagramm ablesbaren Werten für Umlaufzeit = 1,32 s und den Bahnradius = 14 cm ist $v^2/r = 3,1 \text{ m/s}^2$, was unter Berücksichtigung der Messfehler als Bestätigung der Vermutung angesehen werden kann.

Der Funktionsterm der Parabel, welche die Bewegung der Projektion P bei kleinem s beschreibt, soll nun anhand der Abb.5.6 hergeleitet werden. Das Dreieck ABC ist nach dem Satz des Thales ein rechtwinkliges Dreieck. In der Zeit t legt P während der Kreisbewegung von A nach B den Weg s zurück. Der Kreisbogen AB weicht bei kleinem t nur sehr wenig von der Kathete AB ab. Es gilt somit nach dem Kathetensatz:

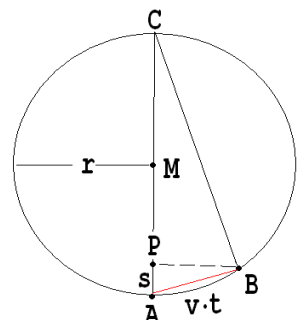


Abb.5.6

$$\begin{array}{ccc} s \cdot (2 \cdot r) = (v \cdot t)^2 & \rightarrow & s = [(v^2/r)/2] \cdot t^2; \quad s = (a/2) \cdot t^2 \\ & \downarrow & \\ a = v^2/r & \rightarrow & |\mathbf{F}_Z| = m \cdot v^2/r \end{array}$$

Für die Zentripetalkraft wird oft die Gleichung $F = m \cdot \omega^2 \cdot r$ angegeben. ω ist die Winkelgeschwindigkeit des kreisenden Körpers, sie beschreibt den Winkel (im Bogenmaß), der in einer Zeiteinheit von der Strecke überstrichen wird, welche den kreisenden Körper mit dem Drehpunkt verbindet.

$$\omega = 2 \cdot \pi / T; \quad v = 2 \cdot \pi \cdot r / T; \quad v = \omega \cdot r$$



$$F = m \cdot v^2 / r = m \cdot (\omega \cdot r)^2 / r = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

Aufgaben

Zur Behandlung der hier gegebenen Aufgaben muss das Additionsgesetz der Kräfte bekannt sein, welches erst in den folgenden Kapiteln behandelt wird. Dieses Gesetz besagt:

Wirken auf einen Körper K zwei Kräfte F_1 und F_2 , dann verhält sich der Schwerpunkt von K so, als ob nur eine der Vektorsumme von F_1 und F_2 gleichende Kraft F_3 auf ihn einwirke.

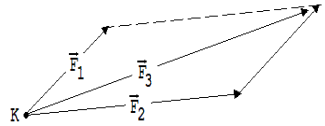


Abb.5.7

1. Ein mit Wasser gefüllter Eimer wird in einer vertikalen Ebene auf einer Kreisbahn mit $r = 0,8 \text{ m}$ um einen Punkt M gedreht.

Welche Geschwindigkeit muss der Eimer am höchsten Punkt seiner Bahn mindestens haben, wenn das Wasser nicht auslaufen soll ?

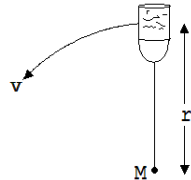


Abb.5.8

2. Wenn die Straße glatt ist (vernachlässigbare Reibung), dann muss sie in einer Kurve nach dem äußeren Kurvenrand hin ansteigen, damit ein Auto nicht aus der Kurve heraus rutscht.

Wie groß muss der Anstiegswinkel α in einer Kurve mit dem Radius $r = 50$ für ein Auto mit 100 km/h sein ?

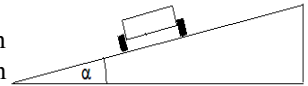


Abb.5.9

3. Mit $v = 20 \text{ km/h}$ fährt ein Radfahrer in eine Kurve, deren Radius $r = 20 \text{ m}$ beträgt.

Mit welchem Winkel α legt sich der Radfahrer hierbei in die Kurve ?

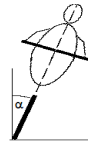


Abb.5.10

4. Am oberen Ende eines rotierenden senkrechten Stabes ist eine Kugel mit einem Faden der Länge $L = 50 \text{ cm}$ angebunden. Sie dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 10 \cdot 1/\text{s}$. Welchen Winkel α bildet der Faden mit dem Stab ?

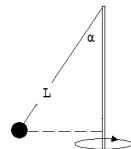


Abb.5.11

5. Auf die höchste Stelle eines Rohres mit dem Radius $r = 0,5 \text{ m}$ wird ein kleiner Experimentierwagen gesetzt. Nach einem ganz leichten Stoß rollt er reibungsfrei abwärts.

Bei welchem Winkel α löst er sich vom Rohr ?

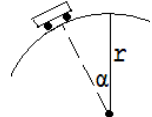


Abb.5.12

6. Gesetze zur Kraft

6.1 Das Wechselwirkungsgesetz

Kräfte beim Anfahren und Bremsen eines Autos

Ein Spielauto mit leicht aufgezogenem Federmotor wird zunächst am Rand der Wippe mit einem Faden festgehalten und in einem passenden Augenblick freigegeben (siehe Abb.6.1).

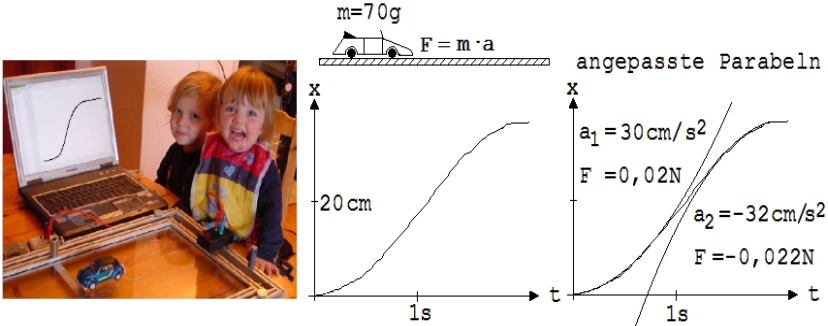


Abb.6.1

Abb.6.2

Der Anfang und das Ende des hierbei aufgezeichneten s-t-Diagramms (siehe Abb.6.2) ist durch parabelförmige Abschnitte gekennzeichnet, die eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit positiver bzw. negativer Beschleunigung anzeigen. Wenn die Geschwindigkeit v in Richtung der x-Achse größer wird ($\Delta v > 0$), dann spricht man von einer positiven, andernfalls von einer negativen Beschleunigung. Mit Computerprogramm CASSY-LAB können dem Bewegungsdiagramm Parabeln angepasst und die zugehörigen Terme bestimmt werden. Der Faktor vor t^2 gleicht der halben Beschleunigung. Nach Kenntnis der Beschleunigung ist die Berechnung der Kraft während des Anfahrens und Bremsens möglich.

Wer beschleunigt das Auto ? Warum fährt ein Auto an ?

Der Motor kann nicht als unmittelbare Ursache angesehen werden, da nach dem Trägheitssatz nur äußere Kräfte eine Beschleunigung herbeiführen. Die Kraft muss von der Straße ausgehen. Die Räder greifen an der Straße an und verformen deren Oberfläche so, dass die Straße wie eine gestauchte Feder auf das Auto zurückwirkt. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhalts denken wir uns ein Spielauto auf einer beweglichen Fahrbahn (siehe Abb.6.3).

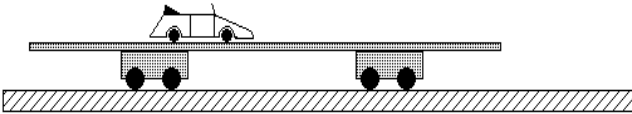


Abb.6.3: 2 Experimentierwagen tragen eine Glasplatte

Fährt das Spielauto an, dann erfahren sowohl das Auto wie die bewegliche Fahrbahn einen Impuls. Nach dem Impulssatz müssen die beiden Impulse betragsmäßig übereinstimmen. Das Auto übt dementsprechend eine Kraft auf die bewegliche Fahrbahn aus (erteilt ihr einen Impuls entgegen der eigenen Bewegungsrichtung), und diese wirkt mit einer gleich großen Kraft auf das Auto.

Wir schließen hieraus auf das Wechselwirkungsgesetz:

Jeder Kraft wirkt eine gleichgroße Kraft entgegen.

Immer wieder weisen alltägliche Erfahrungen auf das Wechselwirkungsgesetz hin.



Abb.6.4

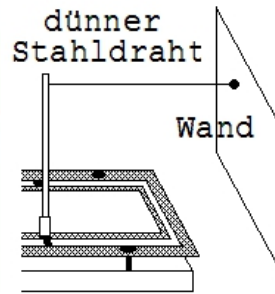


Abb.6.5

In der Abb.6.4 sind Kinder auf einem Floß zu sehen. Sie ziehen an einem Seil, welches die beiden Ufer eines Flüsschens miteinander verbindet und erzeugen damit eine Gegenkraft des Seils, die ihre Bewegung veranlasst.

Die nach dem Wechselwirkungsgesetz zu erwartende Gegenkraft ist häufig Ausdruck einer Verformung. Selbst die Wand eines Klassenzimmers wird unter dem Druck einer Hand verbogen. Eine solche Wandverbiegung kann mit der Experimentierwippe nachgewiesen werden (siehe Abb.6.5).

Zwischen dem Stab auf dem Rand der drehbaren Glasplatte und einer Wand (keine Betonwand) wird ein dünner Stahldraht straff aufgespannt. Eine durch Händedruck verursachte Verformung der Wand bewirkt eine geringe Drehung der Glasplatte, die in bekannter Weise von einem Rechner registriert wird.

6.2 Gesetz zur Addition der Kräfte

Wir stellen uns eine Glasplatte der Masse m vor, die auf kleinen Eisenkugeln aufliegt und somit nach allen Seiten frei beweglich ist. Auf der zunächst ruhenden Platte fahren 2 Spielautos W_1 und W_2 an und üben damit nach dem Wechselwirkungsgesetz die Kräfte $-d(m_1 \cdot v_1)/dt$ und $-d(m_2 \cdot v_2)/dt$ auf die Platte aus.

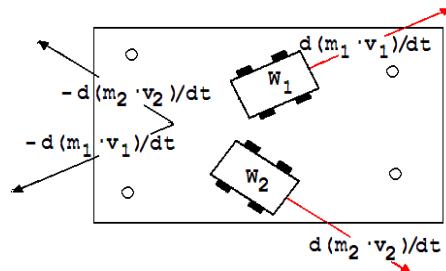


Abb. 6.6

Wie wirkt sich dies auf die Glasplatte aus?

Nach dem Impulssatz bleibt die Impulssumme aus den Impulsen des Glasplattenteile T_i mit den Massen $m_{T1}, m_{T2}, m_{T3}, \dots, m_{Tn} = m$ und denen der Autos konstant.

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 + m_{T1} \cdot v_{T1} + m_{T2} \cdot v_{T2} + \dots + m_{Tn} \cdot v_{Tn} = \text{konstanter Vektor}$$

$$d(m_1 \cdot v_1) / dt + d(m_2 \cdot v_2) / dt + d(m_{T1} \cdot v_{T1}) / dt + d(m_{T2} \cdot v_{T2}) / dt + \dots + d(m_{Tn} \cdot v_{Tn}) / dt = 0$$

$$d(m_1 \cdot v_1) / dt + d(m_2 \cdot v_2) / dt + d(m_{T1} \cdot v_{T1} + m_{T2} \cdot v_{T2} + \dots + m_{Tn} \cdot v_{Tn}) / dt = 0$$

$$\text{Nach dem Schwerpunktsatz gilt: } m_{T1} \cdot v_{T1} + m_{T2} \cdot v_{T2} + \dots + m_{Tn} \cdot v_{Tn} = m \cdot v$$

$\mathbf{v}$ = Geschwindigkeit des Plattenschwerpunkts = $(m_{T_1} \cdot \mathbf{v}_{T_1} + m_{T_2} \cdot \mathbf{v}_{T_2} + \dots + m_{T_N} \cdot \mathbf{v}_{T_N}) / m$

$$d(m_1 \cdot \mathbf{v}_1) / dt + d(m_2 \cdot \mathbf{v}_2) / dt + d(m \cdot \mathbf{v}) / dt = 0$$

Bei konstanten Massen gilt dann: $m_1 \cdot \mathbf{a}_1 + m_2 \cdot \mathbf{a}_2 + m \cdot \mathbf{a} = 0$

$\mathbf{a}$: Beschleunigung des Plattenschwerpunkts

$$- m_1 \cdot \mathbf{a}_1 + (- m_2 \cdot \mathbf{a}_2) = m \cdot \mathbf{a}$$

$-m_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1$ und $-m_2 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2$ sind die Kräfte der beiden Autos auf die Platte

Der Schwerpunkt der Platte verhält sich so, als ob nur eine Kraft $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$ auf ihn wirke. Diese Kraft wird durch vektorielle Addition der von $\mathbf{W}_1$ und $\mathbf{W}_2$ ausgehenden Kräfte $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ erhalten.

Schlussfolgerung: Wirken auf einen Körper K (hier eine Glasplatte) mehrere Kräfte $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_i$ dann verhält sich der Schwerpunkt von K so, als ob nur eine der Vektorsumme $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_i$ gleichende Kraft $\mathbf{F}$ an ihm angreife.

$\mathbf{a} \cdot m = \mathbf{F}$ gilt für die Beschleunigung des Schwerpunkts eines Systems S auch dann, wenn zwischen den Teilen dieses Systems keine festen Bindungen bestehen.

$\mathbf{F}$ wird Resultierende der Kräfte $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_i$ genannt.

Berechnung von resultierenden Kräften

An einem Gegenstand greifen zwei Kräfte $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ an. Der Winkel zwischen den Kraftpfeilen sei α (siehe Abb.6.7).

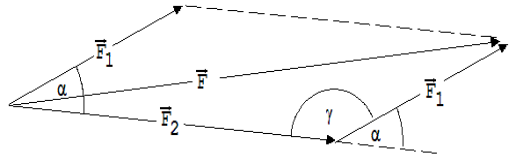


Abb.6.7

Wie groß ist der Betrag der resultierenden Kraft $\mathbf{F}$?

Zur Beantwortung einer solchen Frage wird ein Dreieck aus den Kraftvektoren gebildet. $\mathbf{F}$ erscheint als unbekannte Seite in dem aus $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ und $\mathbf{F}$ gebildeten Dreiecks. Für den Gegenwinkel γ zu $\mathbf{F}$ gilt: $\gamma = 180^\circ - \alpha$. $|\mathbf{F}|$ ist mit Hilfe des Kosinussatzes berechenbar.

$$|\mathbf{F}|^2 = |\mathbf{F}_1|^2 + |\mathbf{F}_2|^2 - 2 \cdot |\mathbf{F}_1| \cdot |\mathbf{F}_2| \cdot \cos \gamma$$

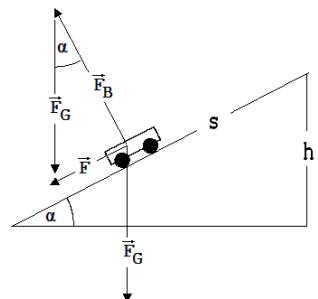
Anwendungen des Additionsgesetzes

Die Hangabtriebskraft

Behauptung: Ein Wagen, der auf einer schiefen Ebene auf einem Weg der Länge s die Höhendifferenz h durchläuft, erfährt eine nur von h abhängige Geschwindigkeitsänderung.

Beweis:

Die Beschleunigung eines Wagens der Masse m entlang der schiefen Ebene weist auf eine Kraft $\mathbf{F}$ (Hangabtriebskraft) parallel zu dieser Ebene hin; sie ist die Resultierende der auf den Wagen wirkenden Kräfte. Auf den Wagen wirkt die Erde



mit ihrer Anziehungskraft $F_G = m \cdot g$ und die schiefe Ebene mit einer Abstoßungskraft F_B . Von Reibungskräften soll abgesehen werden.

Abb.6.8

$$F/F_G = h/s \rightarrow F = h/s \cdot m \cdot g = m \cdot a \rightarrow a = g \cdot h/s$$

$$(v_2 - v_1)/t = g \cdot h/s$$

v_1 : Anfangsgeschwindigkeit, v_2 : Endgeschwindigkeit,
t: Bewegungszeit

$$(v_2 - v_1)/t = g \cdot h/s \rightarrow (v_2 - v_1) \cdot s/t = g \cdot h$$

Für die mittlere Geschwindigkeit s/t gilt: $s/t = (v_2 + v_1)/2$.

$$(v_2 - v_1) \cdot s/t = g \cdot h \rightarrow (v_2 - v_1) \cdot (v_2 + v_1)/2 = g \cdot h$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2 \cdot g \cdot h$$

Demnach ist die Änderung von v^2 und somit auch die von v nur von der Höhenabnahme h abhängig.

Die Hangabtriebskraft F gewinnt man auch, indem man die Gewichtskraft F_G wie in der Abb.6.9 sichtbar in zwei Kräfte F und F_N (Normalkraft) zerlegt. Erlaubt ist dies, weil nach dem Additionsgesetz der Kräfte F und F_N zusammen die gleiche Wirkung auf den Wagen haben wie F_G alleine.

Die anfangs stehende Behauptung über die Änderung der Geschwindigkeit gilt auch dann, wenn der Wagen eine gekrümmte Bahn hinab rollt. In diesem Fall können wir die Bahn als eine Folge von n vielen kleinen schiefen Ebenen mit der Höhendifferenz Δh sehen (siehe Abb.6.10). Für jede dieser kleinen Ebenen gilt:

$$v_{\text{Ende}}^2 - v_{\text{Anfang}}^2 = 2 \cdot g \cdot \Delta h$$

Abb.6.10

Für die Summe aller n Differenzen $v_{\text{Ende}}^2 - v_{\text{Anfang}}^2$ erhalten wir:

$$v_2^2 - v_1^2 + v_3^2 - v_2^2 + v_4^2 - v_3^2 \dots + v_n^2 - v_{n-1}^2 = 2 \cdot g \cdot \Delta h_1 + 2 \cdot g \cdot \Delta h_2 + 2 \cdot g \cdot \Delta h_3 \dots$$

Auf der linken Seite heben sich $v_{n-1}^2, v_{n-2}^2 \dots v_2^2$ gegenseitig auf.

$$v_n^2 - v_1^2 = 2 \cdot g \cdot (\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 \dots) = 2 \cdot g \cdot h$$

Im Folgenden wird ein Experiment zur Überprüfung der letzten Aussage vorgestellt.



Abb.6.11

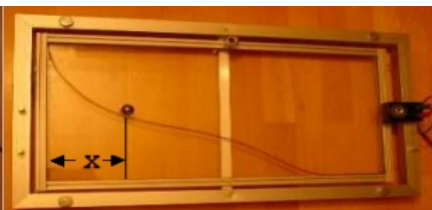


Abb.6.12

Die Abb.6.11 und 6.12 zeigen eine in Querrichtung geneigte Wippe (die Schmalseiten sind

geneigt, die Längsseiten verlaufen waagrecht), auf der eine Kugel entlang einer vorgeschriebenen Bahn hinab rollt. Die Bahn ist jeweils durch einen Schweißdraht (Durchmesser = 4 mm) vorgegeben, der zwischen zwei diagonal gegenüber liegenden Ecken der Wippe eingespannt ist.

Die in den Abbildungen erkennbaren Bahnen nehmen vor dem unteren Ende einen waagrechten Verlauf an, somit werden die mit der Geschwindigkeit 0 am oberen linken Ende der Bahn beginnende Bewegungen am Ende gleichförmig.

In der Abb.6.13 sind die zugehörigen Weg-Zeit-Diagramme zu sehen (das obere ist der Abb.6.11 und das untere der Abb.6.12 zuzuordnen). Beide Diagramme haben am Ende gleiche Steigungen und zeigen somit gleiche Endgeschwindigkeiten an.

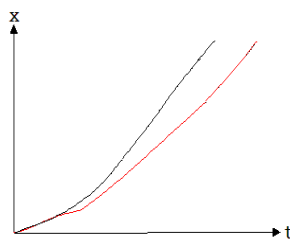


Abb.6.13

Kräfte an einer tragenden Leine

An einer Leine, die zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 aufgespannt ist, sei eine Lampe aufgehängt (siehe Abb.6.14). Man könnte meinen, dass P_1 und P_2 jeweils die halbe Gewichtskraft der Lampe aushalten müssen. Dies ist aber nicht der Fall.

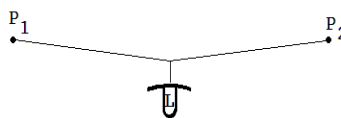


Abb.6.14

Die auf sie wirkenden Zugkräfte sind unter den angezeigten Bedingungen erheblich größer als die halbe Gewichtskraft des aufgehängten Gegenstandes.

Warum ist dies so ?

Zum Verständnis dieses Sachverhalts dient die Abb.6.15.

Die von den Punkten P_1 und P_2 ausgehenden Kräfte F_{P1} und F_{P2} bilden als Resultierende die Gegenkraft - F_L zur Gewichtskraft F_L der Lampe.

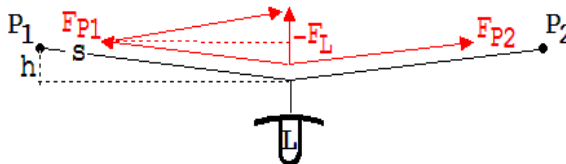


Abb.6.15

$$\text{Es gilt: } |F_{P1}| / (|F_L| / 2) = s / h \rightarrow |F_{P1}| = (s / h) \cdot (|F_G| / 2)$$

s: halbe Seillänge, h: Verschiebung der Seilmitte unter der Gewichtskraft der Lampe

Nach dem Wechselwirkungsgesetz haben die auf P_1 und P_2 wirkenden Kräfte die gleichen Beträge wie die von P_1 und P_2 ausgehenden Kräfte. Die Zugkraft der Lampe an einer Seilhälfte ist demnach um den Faktor s/h größer als die halbe Gewichtskraft der Lampe.

Aufgaben

1. Ein Faden, an dessen Enden Gewichte mit $m_1 = 200 \text{ g}$ und $m_2 = 160 \text{ g}$ hängen, ist über eine feste Rolle gelegt. Wenn das 200g -Gewicht G freigegeben wird, dann bewegt es sich mit einer Beschleunigung a abwärts.

Wie groß ist diese Beschleunigung a ? Welche Geschwindigkeit v hat G $0,5 \text{ s}$ nach seiner Freigabe?

Welchen Weg legt G in $0,5 \text{ s}$ nach dem Start zurück?

Wie groß ist die Zugkraft F des Fadens?

Wie groß ist die Kraft auf die Rolle?

Die Masse der Rolle sowie die Reibung der Rolle an ihrer Drehachse sei vernachlässigbar klein.

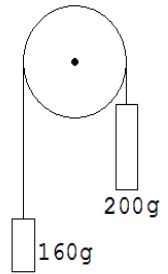


Abb.6.16

2. Auf einer waagrechten und einer schiefen Ebene sind die Wagen W_1 und W_2 .

W_2 zieht W_1 an einem Faden.

Die Masse der Rolle R sei vernachlässigbar klein.

Wie groß ist die Beschleunigung der beiden Wagen?

Wie groß ist die Kraft F auf die Umlenkrolle R ?

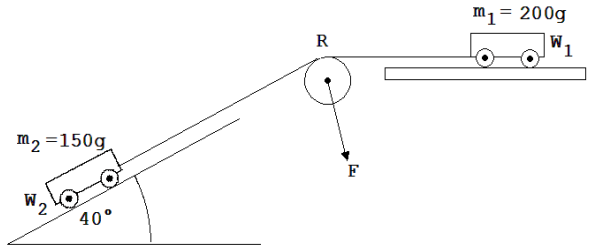


Abb.6.1

3. An einem Flaschenzug hängen zwei Gewichte der Masse $m = 100 \text{ g}$.

Welche Beschleunigung a_1 erfährt das linke Gewicht nach seiner Freigabe?

Die Massen der Rollen sind zu vernachlässigen!

Beachte: Die Zugkräfte F_f der 3 Seilstücke sind gleich groß!

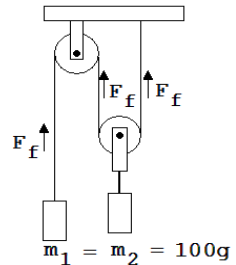


Abb.6.18

4. Beweise den **Galileischen Sehnensatz**!

In seinem berühmten Werk „**Discorsi**“ behauptet Galilei Folgendes: Wenn von dem höchsten Punkt oder von dem Gipfel eines (vertikalen) Kreises (siehe Abb.6.19) nach dem Horizonte hin geneigte Ebenen bis zu der Kreisperipherie errichtet werden, so sind die Fallzeiten längs derselben einander gleich (Physikaufgaben von Dr. K. Petanides, Klett-Verlag).

Nach dieser Behauptung unterscheiden sich die Zeiten t_1 und t_2 nicht, während der die beiden durchlochten Perlen P_1 und P_2 entlang gespannter Drähte von A aus reibungsfrei zum Ende des Drahtes abwärts gleiten.

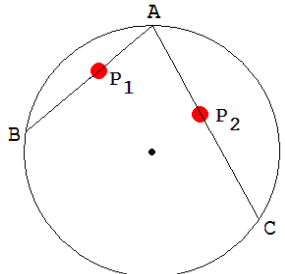


Abb.6.19

7. Messung von Kräften

7.1 Kraftmessung mit einer Schraubenfeder

Bisher wurden Kräfte direkt nach $F = \Delta(m \cdot v) / \Delta t$ ermittelt. Eine Kraft F kann aber auch bestimmt werden, indem man sie hinsichtlich ihrer Wirkung mit bekannten Kräften vergleicht. Zum Vergleich bieten sich die Gewichtskräfte von Gegenständen an, da sie nach $F = m \cdot g$ leicht berechenbar sind. Die Messung einer Kraft F_u durch Vergleich mit einer Gewichtskraft kann wie folgt geschehen:

1. Man lässt F_u auf eine Schraubenfeder wirken und misst die von ihr verursachte Dehnung s .
2. Es wird die Masse m des Körpers K bestimmt, unter dessen Gewicht die Feder die gleiche Dehnung s erfährt. Die Kraft F_u wird der Gewichtskraft auf K gleichgesetzt und nach $F_u = m \cdot g$ berechnet.

Ist das erlaubt ? Wenn ein Körper K an einer Feder ruhig hängt, dann kann daraus zunächst nur geschlossen werden, dass die Feder der Erdanziehung mit der Kraft $F_F = m \cdot g$ entgegen wirkt und so den Körper in Ruhe hält. Dass der Körper K mit seiner Gewichtskraft an der Feder zieht, ist eine Schlussfolgerung aus dem Wechselwirkungsgesetz, wonach der Federkraft $F_F = m \cdot g$ eine gleich große Kraft entgegen wirkt.

Damit direkt aus der Dehnung einer Feder auf die verursachende Kraft geschlossen werden kann, ist ein Gesetz erwünscht, welches die Abhängigkeit der Dehnung s von der Kraft F zeigt.

Es gilt: Die Federdehnung ist der verursachenden Kraft proportional.

$$F/s = \text{Konstante } D \rightarrow F = D \cdot s$$

Die Konstante D mit dem Namen Federkonstante oder Federhärte beschreibt die Kraft der Feder nach Dehnung um eine Längeneinheit. Nach ihrer Kenntnis kann eine Kraft leicht anhand der von ihr verursachten

Abb. 7.1

Federdehnung bestimmt werden. In der Abb.7.1 ist ein Federkraftmesser zu sehen. In einer Hülse ist eine Schraubenfeder, die an einem die Hülse tragenden Haken befestigt ist. Das lose Ende dieser Feder ist über ein Stäbchen mit einem Haken verbunden, der unten aus der Hülse herausragt. An ihm kann die zu messende Kraft angreifen. Eine weiße Markierung M am Stäbchen zeigt die Federdehnung und somit die Stärke der Kraft an.



7.2 Kraftmessung mit der Experimentierwippe (das Drehmoment)

Zur Messung von Kräften ist die Experimentierwippe gut geeignet. Sie hat gegenüber einem einfachen Federkraftmesser den Vorzug, dass die Kräfte mit einem Computer registriert werden können. Die zu messende Kraft kann man direkt an einem Ende der Wippe angreifen lassen (siehe Abb. 7.2).

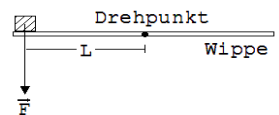


Abb.7.2

Es muss dabei beachtet werden, dass neben dem Betrag der Kraft auch noch deren Richtung und Angriffspunkt für die Drehung der Wippe maßgebend sind. Entscheidend für die Drehung ist das als Drehmoment bekannte Produkt $M = |F| \cdot L$. $F = |F|$ ist der Betrag der drehenden Kraft (hier eine Gewichtskraft), L ist der Hebelarm, der Abstand der Drehachse vom Kraftpfeil oder dessen Verlängerung. Der Kraftpfeil beginnt am Angriffspunkt der Kraft.

Die Drehung der Wippe und das diese Drehung anzeigende elektrische Signal ist bei

Drehmomenten $< 5 \text{ N} \cdot \text{m}$ proportional zu M .

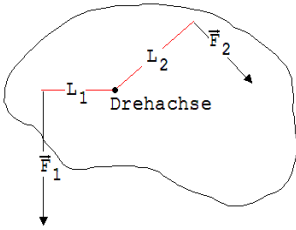


Abb.7.3

Ein Körper, der um eine Achse drehbar ist, wird Hebel genannt (siehe Abb.7.3). Die Drehung eines Hebels unter einer Kraft F ist vom Drehmoment $M = |F| \cdot L$ abhängig.

Folglich gilt: Zwei an einem Hebel angreifende Kräfte mit gegensätzlichem Drehsinn verursachen keine Drehung, wenn die Beträge ihrer Drehmomente übereinstimmen (siehe Abb.7.3).

Hebelgesetz

Anwendungsbeispiele:

1. Messung eines Lungenvolumens

Abb.7.4 zeigt eine Anordnung mit der Experimentierwippe zur Messung des Lungenvolumens. Aus voller Lunge bläst ein Schüler gleichmäßig durch ein um 90° gebogenes Rohr. Diese Luft erfährt an der Rohrbiegung einen Impuls nach rechts, der nach dem Wechselwirkungsgesetz eine Kraft auf den an der Wippe angeklebten Stab zur Folge hat. Anhand des dabei aufgenommenen F - t -Diagramms (siehe: Abb.7.5) kann die durch das Rohr geblasene Luftmenge bestimmt werden.

$$F = m \cdot v / t, \quad m = V \cdot \rho \rightarrow F = V \cdot \rho \cdot v / t$$

$$m = \text{Luftmasse}, \quad \rho = \text{Dichte der Luft}$$

$$V = \text{Luftvolumen}, \quad t = \text{Zeit des Blasens}$$

$$v = \text{Strömungsgeschwindigkeit}$$

$$\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$$

$$A = \text{Querschnitt des Rohres} = 43 \text{ mm}^2$$

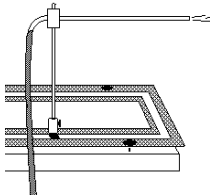


Abb.7.4

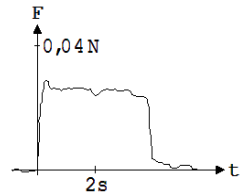


Abb.7.5

Wir stellen uns vor, der waagrechte Teil des Rohres sei so lang, dass er die gesamte ausgepustete Luft mit dem Volumen V aufnehmen kann. Wenn sich die Luft in diesem Teil befindet, dann erstreckt sie sich über die Länge $v \cdot t$.

$$v \cdot t \cdot A = V, \quad v = V / (A \cdot t)$$

Nach Einsetzen von $v = V / (A \cdot t)$ in $F = V \cdot \rho \cdot v / t$ findet man:

$$F = V^2 \cdot \rho / (A \cdot t^2) \rightarrow V^2 = F \cdot A \cdot t^2 / \rho$$

F und t können am Diagramm in der Abb.7.5 abgelesen werden.

$$F \approx 0,026 \text{ N}; \quad t \approx 4,3 \text{ s} \rightarrow V = t \cdot \sqrt{F \cdot A / \rho} \approx 0,0041 \text{ m}^3$$

2. Messung der Zentripetalkraft

Zur Messung der Zentripetalkraft muss die Wippe unempfindlicher gemacht werden. Dies erreicht man, indem man die dem Sensor abgewandte Rahmenleiste der Wippe arretiert (siehe Abb.7.6). Zwei aus einer Nut dieser Leiste herausgezogene Stäbchen greifen unter den äußeren Rahmen und behindern somit die Drehung der Wippe. Die vordere Rahmenleiste wird hiernach bei Belastung mit einem Körper nur geringfügig nach unten gedrückt. An ihr hängt ein Pendel.



Abb.7.6

Es wird nach links soweit umgelenkt, bis der Pendelkörper (100 g) die Höhe der Wippe erreicht und dann freigegeben. Der Pendelkörper durchläuft daraufhin die in der Abb.7.7 angedeutete Kreisbahn. Während dieses Vorgangs wird das in Abb.7.8 sichtbare Diagramm aufgezeichnet, welches zunächst eine Entlastung um $m \cdot g$ und dann eine Belastung um $3 \cdot m \cdot g$ anzeigt. Mit $3 \cdot m \cdot g$ wirkt der Körper am tiefsten Punkt seiner Bahn.



Abb.7.7

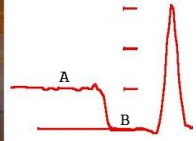


Abb.7.8

$2 \cdot m \cdot g$ ist auf die Zentripetalkraft F_Z zurückzuführen (Gegenkraft zur Zentripetalkraft).

Wie verhält sich die Zentripetalkraft $F = 2 \cdot m \cdot g$ zu der Geschwindigkeit am tiefsten Bahnpunkt ?

Es ist bekannt, dass nur die durchlaufene Höhendifferenz für die Geschwindigkeit des Pendelkörpers maßgebend ist. Es ist gleichgültig, ob der Körper um r fällt oder diese Höhenänderung auf einer Kreisbahn erfährt. Bei einem Fall aus der Höhe r gilt:

$$r = (g/2) \cdot t^2; v = g \cdot t \rightarrow r = (g/2) \cdot (v/g)^2 \rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot r$$

$$F_Z = 2 \cdot m \cdot g \rightarrow F_Z / v^2 = 2 \cdot m \cdot g / (2 \cdot g \cdot r) = m / r \rightarrow F_Z = m \cdot v^2 / r$$

3. Messung kleiner Kräfte

Direkt an der Wippe angreifende Kräfte können nur dann mit ausreichender Genauigkeit gemessen werden, wenn sie größer als 0,005 N sind. Kleine Kräfte werden so gemessen, wie dies in der Abb.7.9 skizziert ist. Am hinteren Ende der Wippe sind zwei Aluminiumschienen E und H angebracht (siehe auch Abb.2.2). H ist am Rahmen der drehbaren Glasplatte und E ihr gegenüber am festen Rahmen befestigt. Auf diese beiden Schienen wird ein Hebel so aufgelegt, dass sein Schwerpunkt zwischen E und H liegt. Wirkt auf das eine Ende des Hebels die Kraft F_1 dann wird die größere Kraft $F_2 = (a/b) \cdot F_1$ über die Schiene H der Wippe mitgeteilt. a ist der zu F_1 , und b der zu F_2 gehörende Hebelarm. Die obere Kante von E ist die Drehachse des aufgelegten Hebels. Zur Begründung dieser Behauptung muss gesagt werden, dass sich der Hebel unter F_1 solange um E dreht, bis von der Schiene H ein rechts drehendes Moment ausgeübt wird, welches das Moment der Kraft F_1 ausgleicht. Da die von H ausgehende Kraft betragsmäßig mit F_2 übereinstimmt, können wir schreiben:

$$|F_1| \cdot a = |F_2| \cdot b \rightarrow |F_2| = (a/b) \cdot |F_1|$$

Eine Metallscheibe in einer mit Öl gefüllten Schale S sorgt dafür, dass der Hebel nach einer plötzlichen Belastung nicht lange hin und her schwingt. Eine verschiebbare Hülse B sowie ein auf der Wippe verschiebbares Gewicht G ermöglichen das Ausbalancieren des Hebels.

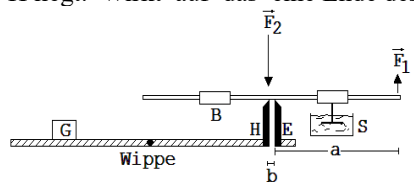


Abb.7.9

7.3 Kraftmessung mit einem Konstandraht

Zur elektrischen Messung von Kräften werden meistens sogenannte Dehnungsmessstreifen eingesetzt. Das in der Abb.7.10 mit einem D gekennzeichnete Gebilde ist ein solcher Dehnungsmessstreifen. Zwischen zwei Folien ist ein mäanderförmig gewundenes Konstantanbändchen eingebettet. In der Abbildung sind

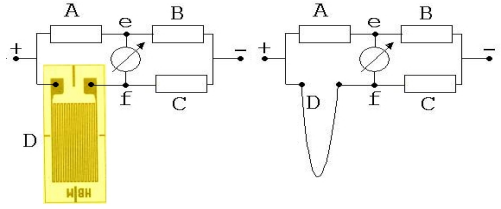


Abb.7.10

Abb.7.11

die Bedingungen erkennbar, unter denen ein solcher Dehnungsmessstreifen Kräfte anzeigt. Er bildet mit 3 weiteren Leitern A, B und C eine als Wheatstonebrücke bezeichnete Leiterkombination. Die vom -Pol zum +Pol einer Stromquelle fließenden Elektronen nehmen je zur Hälfte den Weg durch das obere (A,B) und durch das untere Leiterpaar (D,C), denn die elektrischen Widerstände der Leiter stimmen überein. Es besteht kein Anlass für einen Strom durch das an den Punkten e und f angeschlossene Messgerät. Wenn der Dehnungsmessstreifen D unter einer Kraft gedehnt wird, dann zeigt das angeschlossene Messgerät von f nach e fließende Elektronen an. Eine Erklärung hierfür wird sofort gefunden. Die Leiter A, B, C und D, die anfangs übereinstimmende elektrische Widerstände hatten, werden nicht mehr von gleich starken Strömen durchflossen, denn D hat nun einen höheren Widerstand als die anderen Leiter, da seine Leiterbahnen bei Belastung länger und dünner werden. Zunächst verteilen sich die vom - Pol kommenden Elektronen je zur Hälfte auf B und C, dann aber zieht ein Teil der durch C fließenden Elektronen den Leiter A wegen seines geringeren Widerstandes dem Leiter D vor und nimmt den Weg über das Messgerät. Es ist noch anzumerken, dass man eine Kraft niemals direkt am Dehnungsmessstreifen angreifen lässt. Dehnungsmessstreifen werden zur Kraftmessung auf elastische Gegenstände geklebt. Diese werden einer Kraft ausgesetzt. Anstelle eines Dehnungsmessstreifens kann auch ein Konstantandraht als Kraftsensor eingesetzt werden (siehe Abb.7.11). Man nimmt Konstantan statt Kupfer oder Eisen, denn dieses Metall hat gegenüber Eisen oder Kupfer den Vorzug, dass sein elektrischer Widerstand nur sehr wenig von Temperaturänderungen abhängig ist, weshalb solche Änderungen keine Kräfte vortäuschen können.

Die Abb. 7.12 zeigt eine im Lehrmittelhandel erhältliche Leiterplatte (Höhne-Messtechnik) mit einer Wheatstonebrücke und einem Signalverstärker. Der als Kraftsensor dienende Konstantandraht ist mit Trinkhalmen zu einer Raute aufgespannt, damit kleine Kräfte gemessen werden können. Ein Haken hängt an der unteren Ecke der Raute. An ihm zieht ein Gegenstand der Masse m mit der Kraft $F = m \cdot g$. Nach dem Additionsgesetz der Kräfte sind die vom Haken auf den Draht nach links und rechts wirkenden Zugkräfte nicht gleich $F/2$, sondern um den Faktor L/h größer (siehe Abb.6.15).

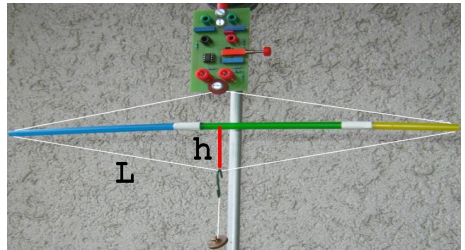


Abb.7.12

Der Konstantandraht kann auf vielfältige Weise zur Messung von Kräften eingesetzt werden. Ein interessantes Anwendungsbeispiel ist die Messung einer Kraft, die eine sich aufrichtende Person infolge ihrer Beschleunigung auf den Boden ausübt.

In Abb.7.14 ist eine Person zu sehen, die auf einem 3 cm dicken Brett aus der Kniebeuge in den Stand geht. Ein Drahtmesswandler auf der Unterseite des Bretts dient als Kraftsensor (siehe Abb.7.13). Der Konstantendraht des Messwandlers wird bei der Belastung des Bretts gedehnt.



Abb.7.13



Abb.7.14

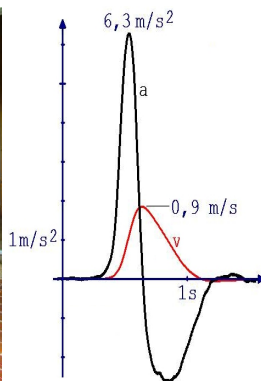


Abb.7.15

Das dabei entstehende F-t-Diagramm wird in ein a-t-Diagramm umgewandelt, indem den Messwerten die Quotienten $F/m = a$ (m = Masse der Person) zugeordnet werden. In der Abb.7.15 ist das zur dargestellten Bewegung gehörende Beschleunigungsdiagramm zu sehen. Mit Hilfe eines Computerprogramms wurde aus dem a-t-Diagramm des Schwerpunkts ein v-t-Diagramm entwickelt. Die Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt t ermittelte dieses Programm folgendermaßen:

1. Die Zeit seit Beginn des Beschleunigungsvorgangs bis zum Zeitpunkt t wurde in viele kleine Zeitabschnitte Δt eingeteilt. Die Δt s wurden so klein gewählt, dass sich die Beschleunigung a während eines Δt kaum ändert und so die Geschwindigkeitsänderung in diesem Zeitabschnitt durch Bildung des Produkts $a \cdot \Delta t$ errechnet werden kann.
2. Die vielen kleinen Geschwindigkeitsänderungen $a \cdot \Delta t$ wurden errechnet und addiert. Mit der Summe dieser Änderungen wurde die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t erhalten.

Die hier beschriebene Summenbildung heißt Integration.

8. Über den Auftrieb in Flüssigkeiten und Gasen

Mit der Anordnung der Abb.8.1 kann die Kraft gemessen werden, die das im Becherglas aufsteigende Wasser auf die Unterseite eines Holzstabs ausübt. Der rechts von der Mitte der Wippe angeordnete Holzstab übt über den ihn haltenden Stab ein Drehmoment auf die Wippe aus. Bei einem gleichmäßigen Zufluss des Wassers zeichnet der Rechner eine nach oben gehende Gerade. Hiermit wird angezeigt, dass die durch das Wasser hervorgerufene Kraft F der Eintauchtiefe direkt proportional ist. Werden solche Messungen mit Holzstäben verschiedenen Querschnitts A durchgeführt, dann ist zu sehen, dass F der Querschnittsfläche A proportional ist. F/A ist konstant, wenn die Eintauchtiefe nicht geändert wird.

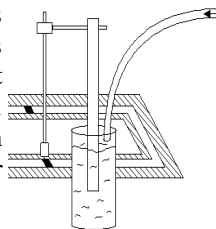


Abb.8.1

Das Verhältnis F/A , die Kraft pro Flächeneinheit, heißt Druck p . Die Druckeinheit 1 N/m^2 trägt den Namen Pascal (Abkürzung: Pa). 100000 Pa werden zu der Einheit 1 bar zusammengefasst.

Einen Hinweis zur Berechnung des Wasserdrucks gibt das in Abb.8.2 angedeutete Experiment. Kein Holzstab, sondern ein von einem dünnen Stiel gehaltenes Blech taucht in das Becherglas. Wenn Wasser über das Blech hinaus aufsteigt, wird keine Wasserkraft angezeigt. Dies deutet darauf hin, dass der Druck auf der Unterseite des Blechs gleich dem Wasserdruck auf der Oberseite ist. Der Druck ist offensichtlich nicht davon abhängig, ob die Angriffsfläche nach oben oder unten weist. Die Kraft auf die Unterseite des Blechs erschien zunächst nicht berechenbar, anders verhält es sich mit der Kraft F auf die Oberseite. Sie wird sofort als Gewichtskraft der darüber stehenden Wassermasse erkannt.

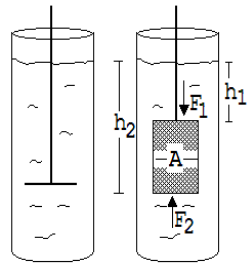


Abb.8.2 Abb.8.3

m : Masse des über dem Blech stehenden Wassers, A : Fläche des Blechs, ρ : Dichte des Wassers, h : Eintauchtiefe des Blechs $F = m \cdot g$; $F = \rho \cdot h \cdot A \cdot g$

Für den Wasserdruck p in der Tiefe h gilt demnach: $p = F/A = \rho \cdot g \cdot h$.

In dem Experiment der Abb.8.3 wird die Auftriebskraft untersucht, die ein Quader durch das im Glas aufsteigende Wasser erfährt. Das Kraft-Zeit-Diagramm zu diesem Experiment strebt nur dann aufwärts, solange das Wasser von der Unterseite zur Oberseite des Quaders steigt. Ist der Quader allseits von Wasser umgeben, bleibt die Auftriebskraft konstant. Diese Tatsache ist leicht verständlich. Wenn das Wasser den Quader übersteigt, dann nimmt der Druck auf die Oberseite ebenso zu wie der Druck auf die Unterseite. Zur Berechnung der Auftriebskraft F müssen wir die oben und unten wirkenden Flüssigkeitskräfte subtrahieren.

$$F_1 = A \cdot p_1 ; \quad F_2 = A \cdot p_2$$

p_1 ist der von oben und p_2 der von unten wirkende Wasserdruck.

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot h_1 , \quad p_2 = \rho \cdot g \cdot h_2 , \quad F = F_2 - F_1 = A \cdot \rho \cdot g \cdot h_2 - A \cdot \rho \cdot g \cdot h_1 = \rho \cdot g \cdot A \cdot (h_2 - h_1)$$

$A \cdot (h_2 - h_1)$ ist das Volumen, $\rho \cdot A \cdot (h_2 - h_1)$ die Masse und $g \cdot \rho \cdot A \cdot (h_2 - h_1)$ die Gewichtskraft des verdrängten Wassers.

Die Auftriebskraft F ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.

Gesetz des Archimedes

Ein eindrucksvolles Experiment zum Gesetz des Archimedes ist in Abb.8.4 dargestellt.

Auf der Wippe steht eine mit Wasser gefüllte Wanne. Ein Schiffchen wird an einem Faden zunächst auf der Glasfläche an der Wanne entlang und dann durch das Wasser von links nach rechts gezogen. Im ersten Fall wird eine Gewichtsverlagerung registriert, aber nicht im 2. Fall, denn die Gewichtskraft des Schiffchens ist gleich der Gewichtskraft des verdrängten Wassers.



Abb.8.4

Anmerkung: Das Prinzip des Archimedes gilt sowohl in Flüssigkeiten wie in Gasen z.B. in Luft. Die Auftriebskraft die ein Körper durch ein Gas erfährt, ist gleich der Gewichtskraft des verdrängten Gases. Ein mit Wasserstoff oder Helium gefüllter Ballon ist leichter als die von ihm verdrängte Luft. Demzufolge steigt dieser Ballon auf.

9. Reibungskräfte

9.1 Gleitreibung

Ein auf einer waagrechten Platte angestoßenes Holzklötzchen verharrt nicht in einer gleichförmigen Bewegung, sondern kommt nach

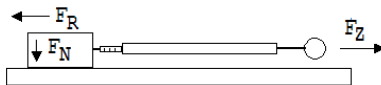


Abb.9.1

kurzer Zeit zur Ruhe. Diese Tatsache weist auf eine von der Platte ausgehende Reibungskraft F_R hin, welche der Bewegung entgegenwirkt. Kleine Erhebungen auf den Berührungsflächen bremsen. Zieht man, wie in Abb.9.1 sichtbar, ein Holzklötzchen mit einem Federkraftmesser gleichförmig über die Tischplatte, dann ist die Federkraft F_Z dem Betrage nach gleich der Reibungskraft F_R . Die Reibungskraft kann deshalb am Kraftmesser abgelesen werden.

Es stellt sich heraus, dass die Reibungskraft nicht von der Geschwindigkeit und der Größe der reibenden Flächen abhängig ist. Neben deren Rauigkeit ist nur noch die Kraft von entscheidender Bedeutung, mit der das Klötzchen auf seine Unterlage drückt. Diese Kraft trägt den Namen Normalkraft F_N . Wenn das Klötzchen auf einer waagrechten Fläche liegt, dann gleicht F_N seiner Gewichtskraft.

Es gilt: $F_R \sim F_N$ ($F_R = |F_R|$!). Der Quotient F_R/F_N kennzeichnet die Rauigkeit der reibenden Flächen, er wird Reibungskoeffizient μ genannt.

9.2 Haftreibung

Wird ein Holzklötzchen aus der Ruhe in Bewegung gesetzt, dann ist zunächst eine im Vergleich zur Gleitreibungskraft größere Kraft, Haftreibungskraft F_H genannt, erforderlich. Zieht man einen Schlitten auf einem mit Schnee bedecktem Weg an, dann ist der Unterschied zwischen Haft- und Gleitreibungskraft besonders auffällig.

Auch für F_H gilt: $F_H \sim F_N \rightarrow F_H / F_N = \mu_H$; μ_H : Haftreibungskoeffizient ($\mu_H > \mu$)

Wegen $F_H > F_R$ sollte ein Autofahrer darauf achten, dass sein Auto nicht mit schleifenden, sondern mit rollenden Rädern gebremst wird, denn die maximale Haftkraft eines rollenden Rades ist nicht F_R , sondern F_H .

Aufgaben:

1. Ein Auto der Masse m wird auf ebener Straße bei $v_0 = 100$ km/h voll gebremst, so dass es rutscht (siehe Abb.9.2). Wie lange ist der Bremsweg s bei einem Reibungskoeffizient

$$\mu_{\text{Straße-Reifen}} = 0,8 ?$$

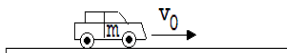


Abb.9.2

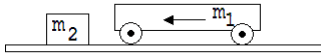


Abb.9.3

2. Ein Wagen mit der Masse $m_1 = 200$ g rollt auf ebener Strecke mit $v = 3$ m/s auf einen Bremsklotz mit $m_2 = 100$ g (siehe Abb.9.3).

Wie lange ist der Bremsweg s bei einem Reibungskoeffizient $\mu_{\text{Bremsklotz-Fahrbahn}} = 0,6$?

3. Ein Auto fährt in einer ebenen Kurve mit dem Radius $r = 50$ m.

Welche Geschwindigkeit v darf das Auto maximal haben, wenn es nicht aus der Kurve heraus rutschen soll ? Der Reibungskoeffizient μ betrage 0,9.

9.3 Reibungskräfte in einer Flüssigkeit

Die Reibungskraft eines gleitenden Körpers ist von dessen Geschwindigkeit unabhängig. Anders verhält es sich mit der von einer Flüssigkeit verursachten Reibungskraft. Zur Untersuchung der Flüssigkeitsreibung dient das in der Abb.9.4 angedeutete Experiment. Auf der Experimentierwippe steht ein mit Motoröl gefüllter Zylinder. In ihm wird eine Eisenkugel an einem Faden gleichförmig herabgelassen. Der Punkt A des hierbei aufgenommenen Diagramms kennzeichnet den Beginn der Bewegung. Die auf die Wippe wirkende Kraft wird um die Reibungskraft vergrößert. Der Punkt B ist der Berührung der Kugel mit dem Boden des Zylinders zuzuordnen. Die Reibungskraft sowie die Bewegungszeit werden durch die vertikalen - und horizontalen Abstände der beiden Punkte angezeigt. Lässt man die Kugel verschieden schnell von der Oberfläche des Öls bis zum Gefäßboden herab sinken, dann ist festzustellen, dass $F \sim 1/t$ ist.

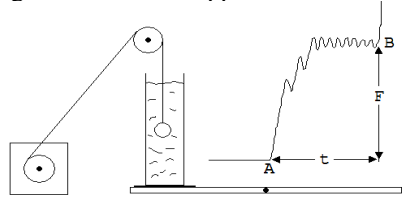


Abb.9.4

Mit der doppelten Zeit ist die Reibungskraft nur noch halb so groß.

Die Reibungskraft F ist zur Kugelgeschwindigkeit v proportional. $F \sim v$

Ebenfalls proportional zur Geschwindigkeit ist die Kraft F_R , die ein durchlässiges Gewebe einer strömenden Flüssigkeit entgegensetzt. Zu dieser Einsicht gelangt man auf etwas indirekte Weise mit dem folgenden Experiment (siehe Abb.9.5). An der freien Schmalseite der Experimentierplatte hängt ein Gefäß mit textilen Boden. Aus diesem Gefäß läuft Wasser aus, wobei der Rechner das nebenstehende Diagramm aufzeichnet.

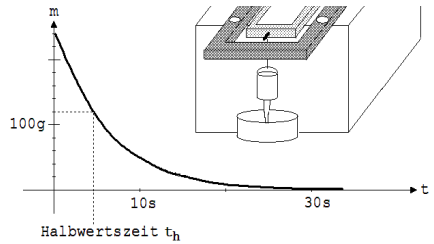


Abb.9.5

Wie an dem Diagramm erkennbar, läuft in einer Zeit t_h , der sogenannten Halbwertszeit, unabhängig vom anfänglichen Wasserstand die Hälfte der Wassermenge aus.

Für die Richtigkeit von $F_R \sim v$ spricht die Tatsache, dass unter der Voraussetzung von $F_R \sim v$ eine Funktion $m = f(t)$ hergeleitet werden kann, deren Graph auf das in der Abb.9.5 sichtbare Diagramm passt.

$$\text{Es gilt: } m \cdot g - F_R = m \cdot a \rightarrow F_R = m \cdot g - m \cdot a$$

Da die Beschleunigung a des Wassers im Vergleich zu g vernachlässigbar klein ist, können wir schreiben: $F_R = m \cdot g$. m ist die Masse des im Gefäß befindlichen Wassers. Δm steht für die Masse des Wassers, welche in einem kleinen Zeitabschnitt Δt ausfließt.

Aus der Annahme $v \sim F_R$ folgt unter Berücksichtigung $\Delta m / \Delta t \sim v$:

$$\Delta m / \Delta t \sim F_R, F_R = m \cdot g \rightarrow \Delta m \sim m \cdot g \cdot \Delta t \rightarrow \Delta m / (m \cdot \Delta t) = \text{Konstante} = k$$

$$\Delta m = m_{\text{vor } \Delta t} - m_{\text{nach } \Delta t} = k \cdot m_{\text{vor } \Delta t} \cdot \Delta t \rightarrow m_{\text{nach } \Delta t} = m_{\text{vor } \Delta t} - k \cdot m_{\text{vor } \Delta t} \cdot \Delta t = m_{\text{vor } \Delta t} \cdot (1 - k \cdot \Delta t)$$

Mit der Anfangsmasse m_0 gilt für die Masse nach dem ersten Δt : $m_1 = m_0 \cdot (1 - k \cdot \Delta t)$ und für die Masse nach dem zweiten Δt entsprechend $m_2 = m_1 \cdot (1 - k \cdot \Delta t)$.

$$m_1 = m_0 \cdot (1 - k \cdot \Delta t), m_2 = m_1 \cdot (1 - k \cdot \Delta t) \rightarrow m_2 = m_0 \cdot (1 - k \cdot \Delta t)^2$$

Die Masse m_n nach dem $n \cdot \Delta t$ ist demnach: $m_n = m_0 \cdot (1 - k \cdot \Delta t)^n$.

Nach der Zeit t ist $n = t / \Delta t$. $\rightarrow m_n = m = m_0 \cdot (1 - k \cdot \Delta t)^{(t/\Delta t)}$.

Für $m_0 \cdot (1 - k \cdot \Delta t)^{(t/\Delta t)}$ schreiben wir $m_0 \cdot [(1 - k \cdot \Delta t)^{(1/k \cdot \Delta t)}]^{k \cdot t}$.

Bei kleiner werdendem Produkt $f = k \cdot \Delta t$ strebt $(1 - k \cdot \Delta t)^{(1/k \cdot \Delta t)} = (1 - f)^{(1/f)}$ gegen den Grenzwert $0,36787\dots$. Der Kehrwert dieses Grenzwerts ist als Zahl $e = 2,71828\dots$ bekannt.

$$m = m_0 \cdot (1/e)^{k \cdot t} = m_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

Das Verhältnis $m/m_0 = e^{-k \cdot t}$ ist nur von der Zeit t abhängig. Folglich ist die Halbwertszeit unabhängig von dem anfänglichen Füllstand. Es kann ein k so bestimmt werden, dass ein Graph nach $m = m_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ genau auf die Kurve in der Abb.9.5 passt.

Hier ist noch Folgendes anzumerken:

Aus „ $(\Delta m / m) / \Delta t = \text{Konstante} = k \leftrightarrow \Delta m / \Delta t = -k \cdot m$ “ folgt unter Berücksichtigung von $m = m_0 \cdot e^{-k \cdot t}$: $\Delta m / \Delta t = k \cdot m_0 \cdot e^{-k \cdot t}$. Wenn man es sehr genau nimmt, dann müsste das Gleichheitszeichen in der letzten Gleichung durch „ $\approx$ “ ersetzt werden, denn dass Gleichheitszeichen ist nur für $\lim (\Delta m / \Delta t)_{\Delta t \rightarrow 0} = -dm/dt$ erlaubt ($dm/dt < 0$!).

$$dm/dt = -k \cdot m_0 \cdot e^{-k \cdot t}, \quad m = m_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

Folgende Regel ist erkennbar: Den Differentialquotient von einer Funktion der Art $f(t) = A \cdot e^{b \cdot t}$ erhält man, indem man die Funktion mit b multipliziert.

Fallbewegung in einer Flüssigkeit

Wir stellen uns eine in Öl fallende Eisenkugel vor. Sie sei zum Zeitpunkt $t = 0$ zum Fall freigegeben worden. Der zum Zeitpunkt t zurückgelegte Weg wird mit y bezeichnet. Der Gewichtskraft $m \cdot g$ wirkt eine der Geschwindigkeit v proportionale Reibungskraft F_R entgegen ($F_R/v = k$, $F_R = k \cdot v$). Für die beschleunigende Kraft gilt demnach: $F = m \cdot g - k \cdot v$. Sie bewirkt die Beschleunigung $a = F / m = g - (k/m) \cdot v$. Ein y - t -Diagramm (siehe Abb.9.6) zu dieser Bewegung erhält man in <http://g-hoehne.de/Sim.html> (Rechtsklick, in neuem Fenster öffnen) mit dem Programm „ $n=2; k=3; m=1; h=0,01; a=9,81-k/m \cdot c$; $c=c+a \cdot h$; $t=t+h$; $y=c \cdot h+y$; $x=t$; $L=t$ “ ($c=v$; $h = \Delta t$; $x=t$).

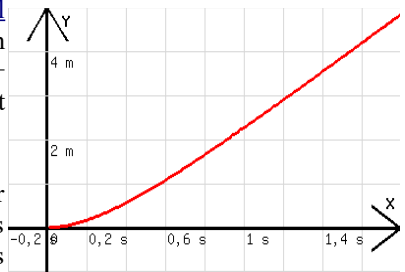


Abb. 9.6

Mit $L=t$ und $n=2$ wird die Simulation zeitlich begrenzt. Weil die anfängliche Reibungskraft wegen der Geschwindigkeit nahe 0 nur einen geringen Einfluss auf die Bewegung hat, ähnelt der Anfang des Diagramms dem Weg-Zeit-Diagramm eines freien Falls. Nach etwa einer Sekunde wird das Diagramm

linear, was eine gleichförmige Bewegung mit der Höchstgeschwindigkeit $v_{\max}$ anzeigt. Die Gewichtskraft wird von der Reibungskraft ausgeglichen.

$$\text{Es gilt dann: } m \cdot g - k \cdot v_{\max} = 0 \rightarrow m \cdot g = k \cdot v_{\max} \rightarrow v_{\max} = m \cdot g / k$$

Für die Differenz $(m \cdot g / k) - v$ der mit der Geschwindigkeit v fallenden Kugel kommt ein Term wie $(m \cdot g / k) \cdot e^{-b \cdot t}$ in Frage, der bei $t = 0$ mit $m \cdot g / k$ beginnt ($v = 0$) und dann dem Wert 0 zustrebt. Mit dem vorgeschlagenen Term ist:

$$v = (m \cdot g / k) \cdot (1 - e^{-b \cdot t}) \text{ und } a = dv/dt = (m \cdot g / k) \cdot b \cdot e^{-b \cdot t}.$$

Aus $a = g$ zum Zeitpunkt $t = 0$ folgt: $(m \cdot g / k) \cdot b = g \rightarrow b = k/m$.

$$v = dy/dt = (m \cdot g / k) \cdot (1 - e^{-(k/m) \cdot t}) \rightarrow y = (m \cdot g / k) \cdot (t + (m/k) \cdot e^{-(k/m) \cdot t}) + C$$

C: Konstante

Beachte: $d[(m/k) \cdot e^{-(k/m) \cdot t}] / dt = -e^{-(k/m) \cdot t} !$

Aus $y = 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ folgt:

$$y = m \cdot g / k \cdot (m/k) \cdot e^{-(k/m) \cdot 0} + C = 0 \rightarrow C = -m^2 \cdot g / k^2$$

$$y = (m \cdot g / k) \cdot (t + (m/k) \cdot e^{-(k/m) \cdot t}) - m^2 \cdot g / k^2$$

Diese Funktion liefert das Diagramme in Abb.9.6

9.4 Reibungskraft der Luft

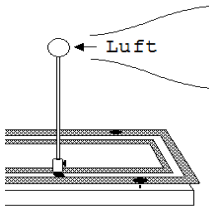


Abb.9.7

Jeder Körper erfährt in einem Luftstrom eine Reibungskraft. Eine solche Kraft F kann z.B. so gemessen werden, wie dies in Abb.9.7 angedeutet ist. Beim Vergleich der Kräfte, die sich zu verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten v einstellen, findet man:

$$F \sim v^2 \rightarrow F/v^2 = \text{Konstante} = k \rightarrow F = k \cdot v^2$$

Die Reibungskraft ist infolge einer Wirbelbildung hinter dem angeblasenen Gegenstand proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit.

Schiefer Wurf unter Berücksichtigung der Luftreibung

Die Luftreibung muss berücksichtigt werden, wenn es darum geht, die Bahn einer Kanonenkugel zu bestimmen (siehe Abb.9.8). Ein Tabellenkalkulationsprogramm macht dies möglich.

Welche Kraft wirkt auf die Kugel ?

Die der Geschwindigkeit entgegen gerichtete Reibungskraft F_R ist v^2 proportional.

$$F_R/v^2 = k; F_R = k \cdot v^2 \quad (|v| = v; |F_R| = F_R)$$

Wie die Komponenten der Reibungskraft F_R zu berechnen sind, erkennt man an der Abb.9.8.

Zu sehen sind zwei ähnliche Dreiecke aus Geschwindigkeits- und Kraftvektoren.

$$-F_{R1}/|F_R| = v_1/|v| \rightarrow F_{R1} = -(v_1/|v|) \cdot |F_R|$$

$$-F_{R2}/|F_R| = v_2/|v| \rightarrow F_{R2} = -(v_2/|v|) \cdot |F_R|$$

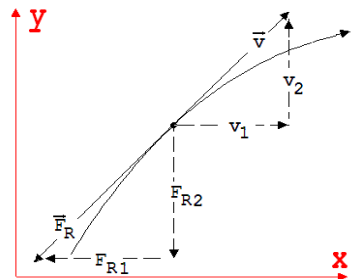


Abb.9.8

$$|F_R| = k \cdot v^2, v = |v| \rightarrow F_{R1} = -v_1 \cdot v \cdot k; F_{R2} = -v_2 \cdot v \cdot k$$

Neben der Reibungskraft wirkt noch die Gewichtskraft $m \cdot g$. $F_1 = -v_1 \cdot |v| \cdot k$ und $F_2 = -g \cdot m - v_2 \cdot v \cdot k$ sind die x- und y-Koordinaten der auf die Kugel wirkenden Kraft.

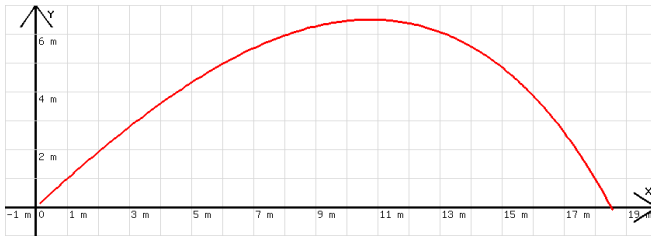
Zur Berechnung der Wurfbahn (siehe Abb. 9.9) dient das nachfolgende Programm auf der nächsten Seite, ausführbar in <http://g-hoehne.de/Sim.html> (Rechtsklick, in neuem Fenster

öffnen).

$h=0,01$; $m=1$; $k=0,05$; $i=\text{wrz}(c^2+d^2)$; $f=-c*i*k$; $a=0,5*j*(f/m-o)+f/m$; $q=-9,81*m-d*i*k$;
 $b=0,5*j*(q/m-p)+q/m$; $x=0,5*a*h^2+c*h+x$; $y=0,5*b*h^2+d*h+y$; $c=c+a*h$; $d=d+b*h$; $j=1$;
 $o=a$; $p=b$; $n=y$; $t=t+h$

Erläuterung: $h = \Delta t$, $c = v_1$, $d = v_2$, $i = |v| = \text{wrz}(c^2+d^2) = \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)}$, $f = F_1$, $q = F_2$, $b = a_2$,
 $a = a_2$

Mit $n = y$ wird das Programm unter der Bedingung $y < 0$ abgebrochen, denn dann ist $l = 0$ größer als y .



– Abb.9.9

Als Anfangswert für $v_1/(m/s) = c$ und $v_2/(m/s) = d$ werden die Wert 15 in das Variablenfeld von <http://www.g-hoehne.de/Sim.html>. eingetragen.

10. Schwingungen

10.1 Die Harmonische Schwingung

An der Vorderseite der Wippe wird eine Schraubenfeder mit einem daran hängenden Metallzylinder Z der Masse $m = 0,1 \text{ kg}$ eingehakt. Z wird nach unten gezogen und sobald er sich beruhigt hat zum Schwingen freigegeben. Mit der Wippe wird die Federkraft $D \cdot (s + y)$ gemessen. D ist die Federkonstante, s die Federdehnung bei ruhendem Z und y ist die Abweichung von der Ruhelage, die nach unten positiv und nach oben negativ gewertet wird. Als Zeitachse eines Kraft - Zeit - Diagramms wird eine Gerade gewählt, welche die Kraft $D \cdot s$ bei ruhendem Z anzeigt. So wird $D \cdot y$ in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt. Auf der senkrechten Koordinatenachse werden Markierungen zu den Kräften bei Dehnungen um 1cm, 2cm, 3cm... angebracht. So wird aus dem Kraft-Zeitdiagramm ein Weg-Zeit-Diagramm. Z wird unter der Kraft $F_y = -D \cdot y$ mit $a_y = -D \cdot y/m$ beschleunigt. Das Minuszeichen zeigt an, dass die Kraft der Auslenkung entgegen gerichtet ist. Bei genauer Prüfung des Sachverhalts wird man schreiben: $F_y = m \cdot g - D \cdot (s+y)$. s ist die Dehnung der Feder in ihrer Ruhelage. $F_y = -D \cdot y$ gilt, weil in der Ruhelage die Gewichtskraft $m \cdot g$ durch die Federkraft $D \cdot s$ ausgeglichen wird.

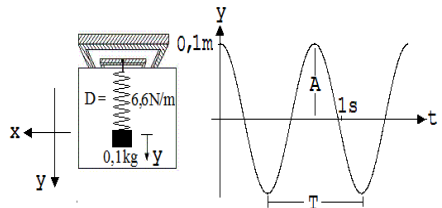


Abb.10.1

Als Zeitachse eines Kraft - Zeit - Diagramms wird eine Gerade gewählt, welche die Kraft $D \cdot s$ bei ruhendem Z anzeigt. So wird $D \cdot y$ in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt. Auf der senkrechten Koordinatenachse werden Markierungen zu den Kräften bei Dehnungen um 1cm, 2cm, 3cm... angebracht. So wird aus dem Kraft-Zeitdiagramm ein Weg-Zeit-Diagramm. Z wird unter der Kraft $F_y = -D \cdot y$ mit $a_y = -D \cdot y/m$ beschleunigt. Das Minuszeichen zeigt an, dass die Kraft der Auslenkung entgegen gerichtet ist. Bei genauer Prüfung des Sachverhalts wird man schreiben: $F_y = m \cdot g - D \cdot (s+y)$. s ist die Dehnung der Feder in ihrer Ruhelage. $F_y = -D \cdot y$ gilt, weil in der Ruhelage die Gewichtskraft $m \cdot g$ durch die Federkraft $D \cdot s$ ausgeglichen wird.

$$F_y = -D \cdot y \rightarrow -D \cdot y = m \cdot a_y \rightarrow a_y = -(D/m) \cdot y$$

Elongation, Amplitude, Schwingungszeit und Frequenz sind Begriffe, die bei der Behandlung

von Schwingungen zu hören sind.

1. **Elongation y:** **augenblickliche Abweichung von der Ruhelage.**
2. **Amplitude A:** **Betrag der maximalen Elongation.**
3. **Schwingungszeit T:** **Zeit, die während einer Schwingung vergeht.**
4. **Frequenz f:** **$f = n/t$, n = Zahl der Schwingungen in der Zeit t .**

Aus $t = n \cdot T$ folgt: $f = n/(n \cdot T) = 1/T$. Die Frequenz gibt die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit an; sie ist gleich dem Kehrwert der Schwingungsdauer. Für die zugehörige Einheit $1/s$ schreibt man Hz. Hz steht für den Nachnamen des Physikers Heinrich Hertz.

Ein Diagramm, welches man auch einer Federschwingung zuordnen könnte, wird gezeichnet, wenn eine Kugel K, so wie in der Abb.5.8 auf der Seite 25 sichtbar, in einer auf der Wippe stehenden Schale rotiert.

Vermutung:

Ein mit $r = A$ in einer senkrechten Ebene um den Schwingungsmittelpunkt des Zylinders Z (siehe Abb.10.1) mit $\omega = 2\pi/T$ (T = Schwingungsdauer) gleichförmig kreisender Gegenstand G ist immer so hoch wie Z, wenn G und Z gemeinsam von ganz unten aufsteigen.

Unter welchen Bedingungen ist G immer auf der Höhe von Z?

Dies ist dann der Fall wenn a_y (von Z) = a_y (von G) ist.

$$a_y \text{ (von Z)} = -D/m \cdot y$$

$$-a_y \text{ (von G)} / (\omega^2 \cdot r) = y/r \rightarrow a_y \text{ (von G)} = -\omega^2 \cdot y$$

$$\text{Für } \omega^2 = D/m \rightarrow \omega = \sqrt{D/m} \text{ ist dies der Fall.}$$

Die Umlaufzeit von G ist dann auch gleich der Schwingungszeit T.

$$\omega^2 = D/m \rightarrow \omega = 2\pi/T = \sqrt{D/m} \rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{m/D} \rightarrow f = [1/(2\pi)] \cdot \sqrt{D/m}$$

Elongation, Geschwindigkeit und Beschleunigung als Funktionen der Zeit

Man kann einem schwingendem Gegenstand G einen mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{D/m}$ rotierenden Zeiger zuordnen, der mit seiner Spitze die Höhe von G anzeigt. (siehe Abb.10.3). Die Winkelgeschwindigkeit ω des Zeigers heißt Kreisfrequenz der Schwingung. Der Zeiger bildet zum Zeitpunkt $t = 0$ den Winkel φ mit der durch den Schwingungsmittelpunkt gehenden x-Achse.

Dieser weicht nach einer Zeit t um den Winkel $\omega \cdot t + \varphi$ von der x-Achse ab. Bei einer Amplitude A gilt dann für die Auslenkung y (Elongation):

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi), \quad \omega \cdot t + \varphi \text{ heißt Phasenwinkel}$$

Die hier aufgestellte Bewegungsgleichung ist nur dann richtig, wenn die beschleunigende Kraft F der Auslenkung proportional ist. Man spricht in diesem Fall von einer **harmonischen Schwingung**. In der Abb.10.3 ist zu sehen, wie sich die Geschwindigkeit des schwingenden Körpers mit der Zeit ändert. Diese Geschwindigkeit v_y erkennen wir als Vertikalkomponente der zur Zeigerspitze gehörenden Geschwindigkeit.

$$v_y = v_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi); v_0 = \omega \cdot A \rightarrow v_y = dy/dt = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

Für die Beschleunigung a_y gilt: $a_y = -\omega^2 \cdot y$.

$$a_y = -\omega^2 \cdot y; y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \rightarrow a_y = dv_y/dt = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

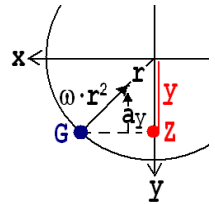


Abb.10.2

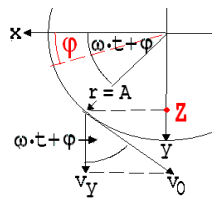


Abb.10.3

Folgende Regeln sind erkennbar:

1. df/dt von $f(t) = \text{Konstante} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ erhält man, indem man $\sin$ durch $\cos$ ersetzt und den dann vorliegenden Term mit dem vor t stehenden Faktor multipliziert.
2. df/dt von $f(t) = \text{Konstante} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ erhält man, indem man $\cos$ durch $-\sin$ ersetzt und den dann vorliegenden Term mit dem vor t stehenden Faktor multipliziert.

10.2 Gedämpfte Schwingung

Die Glasplatte der Wippe schwingt nach einem Stoß mit $T = 0,1s$ bei stark abklingender Amplitude hin und her (siehe Abb.10.4).

Wegen ihrer Amplitudenabnahme nennt man diese Schwingung gedämpft.

In dem hier vorliegenden Fall verläuft die Abnahme nach einer Exponentialfunktion.

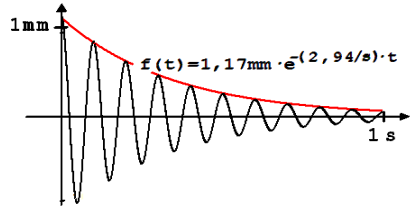


Abb.10.4

Ebenfalls stark gedämpft ist das Hin- und Herschwappen von Wasser in einer Wanne (Abb.10.5) oder das Schwingen einer Wassersäule in einem U-Rohr (Abb.10.6). In der Abb.10.6 ist ein bis zu den weißen Markierungen mit Wasser gefülltes U-Rohr zu sehen.

Auf dem rechten Schenkel sitzt ein Stopfen, durch den ein Glasrohr geführt ist. Wird mit einem an das Glasrohr angeschlossenen Schlauch in das U-Rohr hinein geblasen, dann stellt

sich in den beiden Schenkeln ein verschieden hoher Wasserstand ein. Nach Freigabe der Schlauchöffnung schwingt das Wasser mit abnehmender Amplitude hin und her.

Die Dämpfung der Schwingung kann mit einer am Schlauch angebrachten Klemme geregelt werden. Je mehr der Schlauch zusammen gequetscht ist, desto größer ist die Dämpfung. Bei sehr großer Dämpfung schwingt das Wasser nicht mehr um die Ruhelage. Die Bewegung ist aperiodisch. Ist sie so, dass bei geringfügiger Verminderung der Dämpfung wieder eine gedämpfte Schwingung erkennbar ist, dann spricht man vom **aperiodischen Grenzfall**.

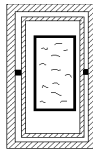


Abb.10.5

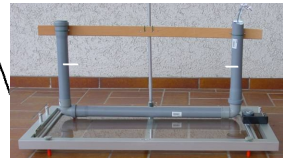


Abb.10.6

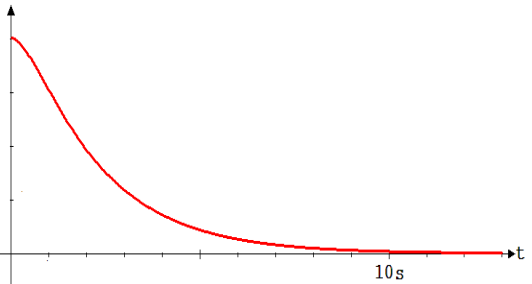


Abb.10.7

Für schwingungsfähige Anzeigeteile von Messinstrumenten, zum Beispiel für den Zeiger eines Amperemeters, wird dieser aperiodische Grenzfall als Bewegungsform angestrebt, weil mit ihm die schnellste Einstellung auf den Messwert erfolgt.

Das Schwingungsverhalten eines Federpendels mit einer der Geschwindigkeit proportionalen Reibungskraft $F_R = -k \cdot v$ kann mit <http://g-hoehne.de/Sim.html> (Rechtsklick, in neuem Fenster öffnen) etwas genauer untersucht werden. Mit dem folgenden Programm auf der nächsten Seite werden die Diagramme in der Abb. 10.8 gezeichnet.

$D=1$; $h=0,02$; $m=1$; $n=12$;

$K=1,8$; $f = -D \cdot y - K \cdot c$; $a=f/m$; $a=j \cdot 0,5 \cdot (a-p)+a$; $y=0,5 \cdot a \cdot h^2 + c \cdot h + y$; $c=c+a \cdot h$; $p=a$;

$K=0,5$; $f = -D \cdot z - K \cdot g$; $a=f/m$; $a=j \cdot 0,5 \cdot (a-q)+a$; $z=0,5 \cdot a \cdot h^2 + g \cdot h + z$; $g=g+a \cdot h$; $q=a$;

$K=3$; $f = -D \cdot w - K \cdot b$; $a=f/m$; $a=j \cdot 0,5 \cdot (a-i)+a$; $w=0,5 \cdot a \cdot h^2 + b \cdot h + w$; $b=b+a \cdot h$; $i=a$;

$t=t+h$; $x=t$; $j=1$; $l=t$;

Erläuterung: $h = \Delta t$, $x=t$. D =Federkonstante, f =Kraft. b , c , g sind die Geschwindigkeiten der 3 Schwingungen, y , z , w sind deren Elongationen und k sind deren Reibungskoeffizienten.

Mit den Korrekturgliedern $a=j \cdot 0,5 \cdot (a-p)$, $a=j \cdot 0,5 \cdot (a-q)$, $a=j \cdot 0,5 \cdot (a-i)$ werden die Beschleunigungen in der Mitte der Zeitabschnitte $h = \Delta t$ näherungsweise bestimmt (siehe: Bewegung unter einer konstanten Normalkraft).

In der Abb.10.8 sind Bewegungsdiagramme zu sehen, die mit einem solchen Programm berechnet wurden. Vorausgesetzt wurde ein 1 kg-Körper an einer Feder mit $D = 1 \text{ kg/s}^2$, der sich unter der Kraft $F_y = -D \cdot y - k \cdot v$ entlang der y -Achse eines Koordinatensystems bewegt.

Als Anfangswerte von y , z und w wurden im Variablenfeld die Werte 5 m eingetragen. Die Diagramme sind den k -Werten 0,5 kg/s, 1,8 kg/s und 3 kg/s zuzuordnen $k = 1,8 \text{ kg/s}$ liefert den aperiodischen Grenzfall.

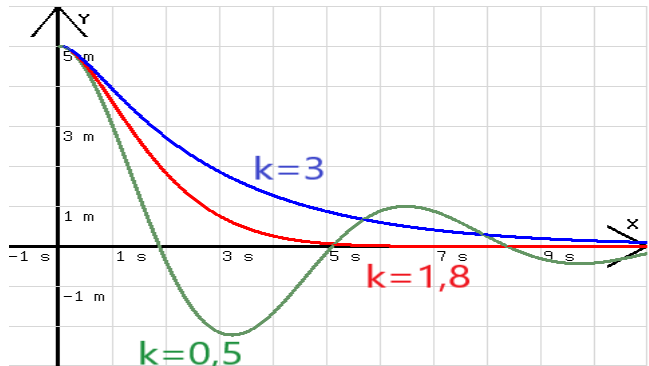


Abb.10.8

10.3 Das Fadenpendel

Wie in Abb.10.11 erkennbar, schwingt ein Fadenpendel über der Experimentierwippe. Bewegt sich der Pendelkörper nahe der Glasplatte, dann erhält man bei kleinen Auslenkungen ein x - t -Diagramm (x = Bogenlänge) des schwingenden Körpers. Die Schwingungszeit für kleine Amplituden kann ohne Schwierigkeiten berechnet werden (siehe Abb.10.12), wenn angenommen wird, dass die Schwingung harmonisch ist. Zur Ermittlung von D muss die zurücktreibende Kraft F zu einer Auslenkung x bestimmt werden.

Die für die Schwingung maßgebende Kraft $m \cdot g$ verhält sich in Bezug auf den schwingenden Körper G wie ihre beiden in der Skizze angedeuteten Komponenten F und F_L . F ist die zurück treibende Kraft. Für ihren Betrag gilt:

$$F = m \cdot g \cdot \sin \alpha.$$

Als Auslenkung x (Kreisbogen) erhalten wir:

$$x = L \cdot \alpha \quad (\alpha = \text{Winkel im Bogenmaß}).$$

$$F / x = D = m \cdot g \cdot \sin \alpha / (L \cdot \alpha)$$



Abb.10.11

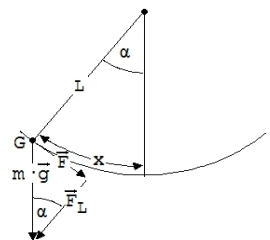


Abb.10.12

Die letzte Gleichung zeigt, dass die Schwingung **nicht** harmonisch ist. Beschränkt man sich jedoch auf kleine Auslenkungen x , dann kann $\sin \alpha$ durch α (Bogenmaß !) ersetzt werden.

$$D \approx m \cdot g / L$$

Anmerkung: Nur bei kleinen Auslenkungen α ist das vom Pendel auf die Wippe wirkende Drehmoment dem Winkel α und damit auch der Kreisbogenlänge annähernd proportional.

10.4 Die Schwebung

Lässt man zwei Fadenpendel mit verschiedenen Frequenzen f_1 und f_2 am gleichen Halter über der Mitte der Experimentierwippe pendeln (siehe Abb.10.13), dann wird ein Schwebungsdiagramm aufgezeichnet. Die Pendel üben auf ihren Halter periodisch schwankende Kräfte F_1 und F_2 aus, die zusammen eine als Schwebung bekannte Schwingungsform ergeben. Minima und

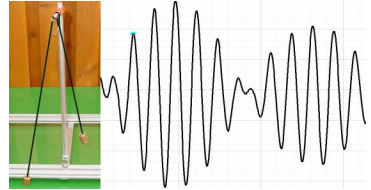


Abb.10.13

Maxima entstehen dann, wenn die Pendel gegeneinander bzw. miteinander schwingen. Angesichts dieser Erscheinung ist das akustische Schwebungsphänomen (Signal mit periodisch schwankender Lautstärke) verständlich. Die Pendel wirken auf ihren Halter wie die Schallwellen auf das Trommelfell. Ein Maximum tritt immer dann auf, wenn die Schwingung von F_1 und F_2 gleichsinnig sind. Wenn dies zu einem Zeitpunkt t der Fall ist, dann trifft dies wieder nach einer Zeit T_S unter der Voraussetzung $f_1 > f_2$ dann zu, wenn F_1 in T_S eine Schwingung mehr ausführt als F_2 . Ist der zeitliche Abstand zweier Maxima $= T_S$ dann gilt demnach:

$$f_1 \cdot T_S - f_2 \cdot T_S = 1 \rightarrow (f_1 - f_2) \cdot T_S = 1 \rightarrow f_1 - f_2 = 1/T_S$$

$$f_1: \text{Frequenz von } F_1, \quad f_2: \text{Frequenz von } F_2, \quad 1/T_S = \text{Schwebungsfrequenz}$$

10.5 Erzwungene Schwingung

Wird eine von zwei einander gegenüber stehenden Stimmgabeln gleicher Frequenz angeschlagen, dann beginnt auch die zweite Gabel zu schwingen; sie empfängt einen Ton von der ersten und tönt zurück. Man spricht in diesem Fall von Resonanz (Widerhall). Die zweite Stimmgabel wird in diesem Fall von den periodisch ihre Richtung wechselnden Kräften einer Schallwelle zu Schwingungen angeregt. Das Ausmaß der Anregung ist von der Frequenz des Erregers abhängig. Vermindert man die Frequenz der ersten Stimmgabel durch Anheften eines kleinen Magneten, dann tönt nach Anschlagen dieser Gabel die zweite weit weniger stark. Mit der im folgenden beschriebenen Anordnung (siehe Abb.10.14) soll untersucht werden, wie die Amplitude des Empfängers von der Frequenz des Erregers abhängt. Ein über der Wippe aufgehängter Magnet taucht in eine auf der Wippe stehende Spule, die von einem Wechselstrom durchflossen wird, dessen Frequenz von kleinen Werten an kontinuierlich ansteigt. Der Magnet wirkt mit einer periodisch wechselnden Kraft über die Spule auf die Wippe und erregt diese zum Schwingen. Hierbei wird deutlich, dass die Schwingungsamplitude dann am

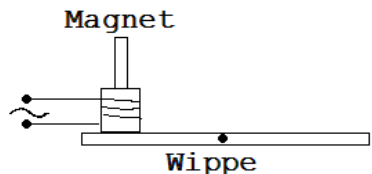


Abb.10.14

größten ist, wenn die Erregerfrequenz mit der Eigenfrequenz der Wippe (10Hz) übereinstimmt (siehe Abb.10.15). In diesem Fall sagt man, die Wippe sei in **Resonanz** mit dem Erreger. Eine solche Resonanz wird oft als lästige Erscheinung wahrgenommen. Der Autofahrer erlebt sie manchmal als unangenehme Vibration im Fahrzeug, wenn die Reifen nicht richtig ausgewuchtet sind und infolgedessen eine Schwingung



Abb.10.15

auf ein Autoteil übertragen wird, dessen Eigenfrequenz der Umlauffrequenz der Reifen gleicht. Unter solchen Bedingungen kann z.B. das Lenkrad vibrieren.

Quantitative Untersuchung einer erzwungenen Schwingung

Zur mathematischen Behandlung der erzwungenen Schwingung stellen wir uns einen Körper der Masse $m=0,01$ kg vor, der zwischen 2 Schraubenfedern mit der gemeinsamen Federkonstante $D = 1$ N/m um den Nullpunkt eines Koordinatensystems entlang der x-Achse schwingt (Eigenkreisfrequenz $= 10 \cdot 1/s$). Neben der Federkraft $-D \cdot x$ (die Federkraft ist der Auslenkung entgegen gerichtet) erfahre dieser Körper noch eine Kraft $F = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ von außen ($F_0 = 0,3$ N, $\omega = 9$). Somit gilt: $m \cdot a = -D \cdot x + F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$. Wenn noch eine von der Geschwindigkeit abhängige Reibungskraft $F_R = -k \cdot v$ zu berücksichtigen ist, dann muss die Gleichung noch durch $-k \cdot v$ ergänzt werden.

$$m \cdot a = -D \cdot x + F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) - k \cdot v$$

Mit dem folgenden Programm in <http://www.g-hoehne.de/Sim.html> (**Rechtsklick, in neuem Fenster öffnen**) wird die Bewegung nach dieser Gleichung grafisch dargestellt.

$N=13$; $D=1$; $h=0,0012$; $m=0,01$; $t=t+h$; $F = -D \cdot y - k \cdot c + 0,3 \cdot \sin(9 \cdot t)$; $a=F/m$; $a=0,5 \cdot j \cdot (a-p)+a$; $y=0,5 \cdot a \cdot h^2 + c \cdot h + y$; $c=c+a \cdot h$; $p=a$; $j=1$; $x=t$; $l=t$

In Abb.10.16 ist das für den reibungsfreien Fall ($k = 0$) erzeugte Diagramm zu sehen. Dieses Diagramm beschreibt die Schwingung eines Körpers mit der Eigenfrequenz $f_E = 1$ Hz, dessen Schwingung von einer mit $f = 0,95$ Hz periodisch schwankenden Kraft veranlasst wird. Die Amplitudenschwankung werden im Hinblick auf die Abb.10.17 verständlich.

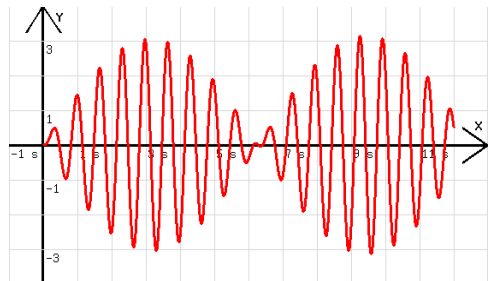


Abb.10.16

In dieser Abbildung ist neben dem v-t-Diagramm des schwingenden Körpers (rot) auch noch ein grünes Diagramm zu sehen, welches die erregende Kraft $F = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ in Abhängigkeit von der Zeit zeigt. Die Diagramme wurden mit dem folgenden Programm erzeugt.

$N=10$; $D=1$; $h=0,0012$; $m=0,01$; $t=t+h$; $F = -D \cdot s - k \cdot c + 0,3 \cdot \sin(9 \cdot t)$; $a=F/m$; $a=0,5 \cdot j \cdot (a-p)+a$; $s=0,5 \cdot a \cdot h^2 + c \cdot h + s$; $z=0,3 \cdot \sin(9 \cdot t)$; $c=c+a \cdot h$; $y=0,1 \cdot c$; $p=a$; $j=1$; $x=t$; $l=t$

Erläuterung: $c = v$, $y = 0,1 \cdot v$, $z = F$

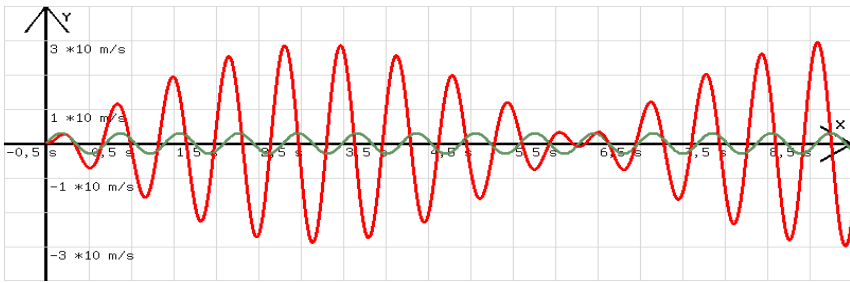


Abb.10.17

Zunächst hat F (grün) die Richtung von v (rot), demzufolge wird der schwingende Körper fortwährend angetrieben und die Amplitude wächst. Ist das Amplitudenmaximum erreicht, dann hat die Kraft nur noch während zweier Viertelperioden die Richtung von v , folglich wird in gleichem Maß angetrieben wie abgebremst. Nach dem Maximum wird mehr abgebremst als angetrieben, weshalb die Amplitude abnimmt. Wenn die Geschwindigkeitsamplitude fast den Wert 0 erreicht hat, sind Kraft und Geschwindigkeit während der gesamten Periodendauer einander entgegen gerichtet. Hiernach erzwingt die Kraft eine Umkehr der Geschwindigkeitsrichtung (Phasensprung) und verstärkt wieder die Schwingung.

Wenn die Kreisfrequenz der Kraft gleich der Eigenfrequenz des schwingenden Körpers ist ($\omega = 10$), dann wirkt die erregende Kraft immer in Bewegungsrichtung (siehe Abb.10.18). Die Amplitude wird bei fehlender Reibung unendlich groß.

Das Diagramm in der Abb.10.16 gleicht einem Schwebungsdiagramm, welches die Summe zweier Schwingungen anzeigt. Die eine Schwingung ist die aufgezwungene Schwingung mit der Frequenz f und die andere ist eine Eigenschwingung mit der Frequenz f_E , die sich beim Anschwingen entwickelt.

Wenn Reibungskräfte im Spiel sind, dann klingt die Eigenschwingung schnell ab, und die Schwankungen der Amplitude unterbleiben (siehe Abb.10.19).

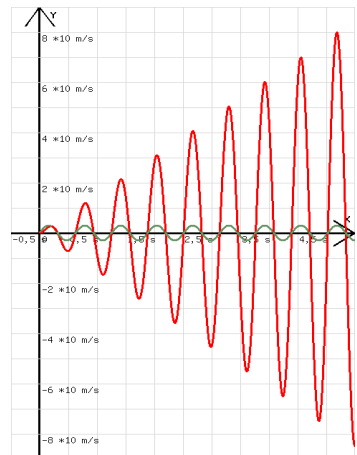


Abb. 10.18

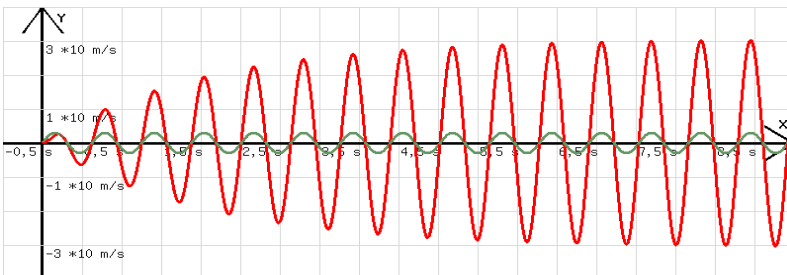


Abb. 10.19 ($k=0,01 \text{ kg/s}$)

Mathematische Herleitung

Das Schwingungsdiagramm zu einer erzwungenen Schwingung ohne Reibung gleicht einem Schwebungsdiagramm, weshalb die folgende Summe für die Elongation x in Frage kommt.

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_E \cdot t), \quad \omega = \text{Erregerkreisfrequenz}, \quad \omega_E = \text{Eigenkreisfrequenz}$$

Die Geschwindigkeit $v(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ ist 0. Wie im Kapitel 10.1 erläutert wurde, sind $A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$ und $B \cdot \omega_E \cdot \cos(\omega_E \cdot t)$ gleich den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der Schwingungen $x = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$ und $x = B \cdot \sin(\omega_E \cdot t)$.

$$v = v_1 + v_2 \text{ ist die Geschwindigkeit der Schwingung } x = A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_E \cdot t).$$

$$\text{Für sie gilt: } v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot \omega_E \cdot \cos(\omega_E \cdot t).$$

$$\text{Aus } v = 0 \text{ für } t = 0 \text{ folgt: } A \cdot \omega = -B \cdot \omega_E \rightarrow B = -A \cdot \omega / \omega_E$$

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t) - A \cdot \omega / \omega_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t) \rightarrow x = A \cdot [\sin(\omega \cdot t) - \omega / \omega_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t)]$$

$$a = dv/dt = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) - B \cdot \omega_E^2 \cdot \sin(\omega_E \cdot t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) + A \cdot \omega \cdot \omega_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t)$$

Die Gültigkeit der Gleichungen für v und a kann wie folgt geprüft werden:

$x = A \cdot [\sin(\omega \cdot t) - \omega / \omega_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t)]$ und die zugehörige Beschleunigung $a = dv/dt$ werden in die Gleichung $m \cdot a = -D \cdot x + F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ eingesetzt.

$$-m \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) + m \cdot A \cdot \omega \cdot \omega_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t) = -D \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t) + D \cdot A \cdot \omega / \omega_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t) + F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Die fett markierten Terme heben sich wegen $D = m \cdot \omega_E^2$ auf.

$$-m \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = -D \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t) + F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$-m \cdot A \cdot \omega^2 = -D \cdot A + F_0 \rightarrow A = F_0 / (D - m \cdot \omega^2); \quad D/m = \omega_E^2 \rightarrow A = (F_0/m) / (\omega_E^2 - \omega^2)$$

$$x = A \cdot [\sin(\omega \cdot t) - \omega / \omega_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t)] \text{ erfüllt mit } A = (F_0/m) / (\omega_E^2 - \omega^2) \text{ die Gleichung}$$

$$m \cdot a = -D \cdot x + F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Der Vorzeichenwechsel von A beim Übergang $\omega < \omega_E$ zu $\omega > \omega_E$ deutet nicht auf einen Phasensprung von x hin, wie dies oft fälschlicherweise behauptet wird, denn mit A ändert auch die Differenz $\sin(\omega \cdot t) - \omega / \omega_E \cdot \sin(\omega_E \cdot t)$ ihr Vorzeichen.

Wie entwickelt sich die Schwingung mit geringer werdendem Unterschied zwischen ω und ω_E ?

Mit der **Regel von L'Hospital** kann eine Antwort gefunden werden. Nach ihr müssen Zähler und Nenner von $[\sin(\omega \cdot t) - \omega \cdot \sin(\omega_E \cdot t) / \omega_E] / (\omega_E^2 - \omega^2)$ nach ω differenziert werden. Der so erhaltene Quotient hat den gleichen Grenzwert wie $[\sin(\omega \cdot t) - \omega \cdot \sin(\omega_E \cdot t) / \omega_E] / (\omega_E^2 - \omega^2)$.

$$x = \lim_{\omega \rightarrow \omega_E} (F_0/m) \cdot [\sin(\omega \cdot t) - \omega \cdot \sin(\omega_E \cdot t) / \omega_E] / (\omega_E^2 - \omega^2)$$

Zähler und Nenner werden nach ω differenziert!

$$x = \lim_{\omega \rightarrow \omega_E} (F_0/m) \cdot [t \cdot \cos(\omega \cdot t) - \sin(\omega_E \cdot t) / \omega_E] / (-2 \cdot \omega)$$

$$x = [F_0 / (2 \cdot \omega \cdot m)] \cdot [\sin(\omega \cdot t) / \omega - t \cdot \cos(\omega \cdot t)], \quad v = dx/dt = [F_0 / (2 \cdot m)] \cdot t \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Wenn die Schwingung einer Schraubenfeder gedämpft ist, dann stellt sich bei einer erzwungenen Schwingung unter der Kraft $F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ein Amplitudenmaximum mit der Erregerfrequenz $f_E = [1/(2 \cdot \pi)] \cdot \sqrt{D/m}$ ein.

$$\text{Es gilt: } m \cdot a = -D \cdot x - k \cdot v + F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Nach dem Einschwingen kommt $x = -A \cdot \cos(\omega \cdot t)$ mit $\omega^2 = D/m$ als Lösung der Gleichung in Frage.

$$v = A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t); \quad a = A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$m \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) = D \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t) - k \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) + F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Die fett gedruckten Terme heben sich wegen $\omega^2 = D/m$ auf.

$$-k \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) + F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0 \rightarrow A = F_0 / (k \cdot \omega) \rightarrow x = [-F_0 / (k \cdot \omega)] \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Aufgaben

1. Ein U-Rohr ist in einer Länge von $L = 30$ cm mit Wasser gefüllt. Wird in den einen Schenkel des U-Rohrs kurzzeitig hinein geblasen, dann beginnt das Wasser zu schwingen.

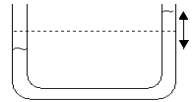


Abb.10.20

Wie groß ist die Schwingungszeit T ?

2. Aus einer Federpistole, deren Feder die Federkonstante $D = 5$ N/cm hat, wird eine 5 g schwere Kugel geschossen. In welcher Zeit t wird die Kugel auf die Geschwindigkeit beschleunigt, mit der sie die Pistole verlässt ?

3. In der folgenden Skizze sind zwei Eisenkugeln zu sehen, die mit gleich langen Fäden am gleichen Punkt aufgehängt sind. Die Kugeln lässt man aufeinander stoßen, wie dies in der Skizze angedeutet ist. Beim Zusammenstoß haften die Kugeln eine sehr kurze Zeit aneinander.

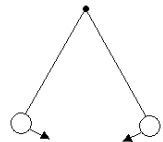


Abb.10.22

Wird die Kontaktzeit größer, wenn der anfängliche Kugelabstand vergrößert wird ? Begründung ohne Rechnung !

4. Zur Bestimmung von g lässt man ein $L = 3$ m langes Pendel mit kleiner Amplitude schwingen. Mit einer Stoppuhr wird als Zeit von 40 Schwingungen 138,8 s gemessen. Welchen Wert erhält g nach diesen Daten ?

11. Gravitationskraft und Planetenbewegung

11.1 Die Gravitationskraft

Die Erde zieht einen Körper K der Masse m_1 mit der Gewichtskraft $m_1 \cdot g$ an. Unter Hinweis auf das Wechselwirkungsgesetz kann gesagt werden: Der Körper K zieht die Erde mit der Kraft $m_1 \cdot g$ an. Diese Kraft ist der Masse des Körpers K proportional.

Wenn sich die Masse von K auf die Kraft auswirkt, dann wird man auch der Masse m_2 der Erde einen entsprechenden Einfluss zubilligen müssen.

$$F \sim m_1; \quad F \sim m_2 \rightarrow F \sim m_1 \cdot m_2$$

Wie ändert sich diese Kraft, wenn der Abstand r der Massenmittelpunkte größer bzw. kleiner wird?

Mit der in Abb.11.1 skizzierten Drehwaage nach Eötvös kann F in seiner Abhängigkeit von r untersucht werden.

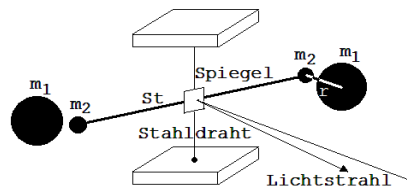


Abb.11.1

Ein Stab St , der von einem senkrecht aufgespannten Stahldraht gehalten wird, trägt an seinen Enden kleine Bleikugeln mit der Masse m_2 und in seiner Mitte einen kleinen Spiegel. Zwei große Bleikugeln mit den Massen m_1 werden an die kleinen Kugeln herangeführt und bewirken infolge ihrer Anziehungskraft eine winzige Drehung des Stabes St . Ein vom Spiegel

reflektierter Lichtstrahl macht die winzige Drehung sichtbar. Aus ihr kann auf die Anziehungskraft geschlossen werden.

Untersuchungsergebnis: $F \sim 1/r^2 \rightarrow F \sim m_1 \cdot m_2 / r^2$

$F / (m_1 \cdot m_2 / r^2) = \text{Konstante} = G \text{ (Gravitationskonstante)} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

$F = G \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2$ **Gravitationsgesetz**

Mit dem Gravitationsgesetzes können wir bei bekanntem Erdradius $r = 6370000 \text{ m}$ die Masse der Erde bestimmen. Für die Erdanziehungskraft $F = m \cdot g$, die ein kg-Körper an der Erdoberfläche erfährt, gilt: $1 \text{ kg} \cdot g = G \cdot (1 \text{ kg} \cdot m_{\text{Erde}}) / r^2 \rightarrow m_{\text{Erde}} = r^2 \cdot g / G = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

11.2 Berechnung einer Planetenbahn

Eine unter der Gravitationskraft der Sonne ablaufende Planetenbewegung kann wie der Wurf mit Reibung mit einem Tabellenkalkulationsprogramm quantitativ behandelt werden.

Die Kraftkomponenten $F_x = F_1$ und $F_y = F_2$ in **Planet**

der x- und y-Richtung eines von der Sonne ausgehenden Koordinatensystems werden wie folgt berechnet (siehe Abb.11.2).

$$-F_1 / F = x/R \rightarrow F_1 = -F \cdot x / R ;$$

$$-F_2 / F = y/R \rightarrow F_2 = -F \cdot y / R ;$$

$$F = G \cdot m \cdot M / R^2, \quad G \cdot M = K$$

m: Masse des Planeten; M: Masse der Sonne

$$a_1 = F_1 / m = K / R^3 \cdot x, \quad a_2 = F_2 / m = K / R^3 \cdot y$$

$$F_1 = -(G \cdot m \cdot M / R^3) \cdot x$$

Zur Berechnung einer Planetenbahn geschieht mit dem folgenden Programm in <http://www.g-hoehne.de/Sim.html> (Rechtsklick, in neuem Fenster öffnen):

```
n = 7800000; K = 1,334E+20; h = 778,35; R = sqrt(x^2 + y^2); a = -K/R^3 * x; b = -K/R^3 * y;
a = 0,5 * j * (a - q) + a; b = 0,5 * j * (b - p) + b; x = 0,5 * a * h^2 + c * h + x; y = 0,5 * b * h^2 + d * h + y ; c = c + a * h;
d = d + b * h; q = a; p = b; l = t; j = 1; t = t + h;
```

Das Koordinatensystem hat seinen Nullpunkt in der Sonne. Als Anfangswerte für einen $m = 2 \cdot 10^8 \text{ kg}$ schweren Planeten wurden folgende Werte gewählt:

$$x = 10^{11} \text{ m}, \quad y = 0, \quad v_x = v_1 = 0,$$

$$v_y = v_2 = 20000 \text{ m/s},$$

$$\text{Sonnenmasse } M = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Die hiermit errechnete Bahn ist in der Abb.11.3 zu sehen. Die Zeit für eine Drehung um die Sonne beträgt in diesem Fall $7800000 \text{ s} = 90,3 \text{ Tage}$.

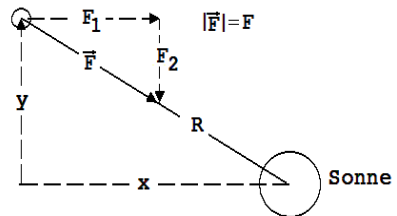


Abb.11.2

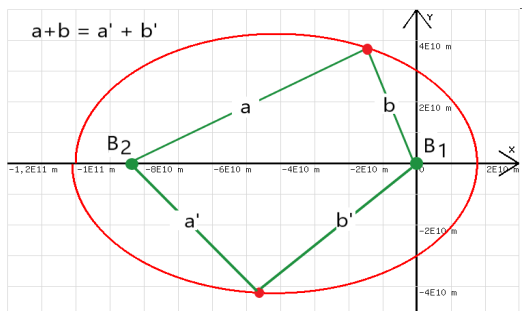


Abb.11.3

11.3 Die Keplerschen Gesetze

An berechneten Planetenbahnen kann die Gültigkeit der drei Keplerschen Gesetze überprüft werden. Johannes Kepler entdeckte sie bei der Auswertung von Messwerten des dänischen Astronomen Tycho de Brahe, der mit ihm am kaiserlichen Hof in Prag in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts als Mathematiker und Hofastrologe tätig war.

1. Keplersches Gesetz : Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen um die Sonne, welche in einem Brennpunkt der Ellipse steht.

Definition: Zu einer Ellipse gibt es zwei Punkte B_1 und B_2 , deren Abstände zu einem gegebenen Ellipsenpunkt eine von der Wahl dieses Punktes unabhängige Summe ergeben. B_1 (Sonne) und B_2 werden Brennpunkte genannt (siehe Abb.11.3).

2. Keplersches Gesetz :

In gleichen Zeiten überstreicht die Verbindungsstrecke Sonne-Planet inhaltsgleiche Flächen (siehe Abb.11.4).

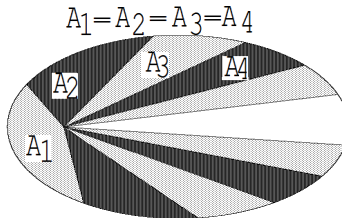


Abb.11.4

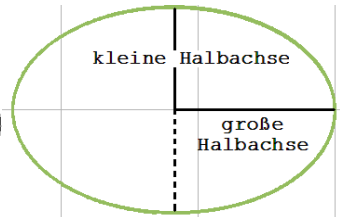


Abb.11.5

3. Keplersches Gesetz : Für alle Planeten gilt: a^3 / T^2 ist konstant. a ist die große Halbachse und T die Umlaufzeit des Planeten (siehe Abb.11.5).

11.4 Die Flächengeschwindigkeit (das Vektorkreuzprodukt)

Das 2. Keplersche Gesetz gilt nicht nur für Planeten in Bezug auf die Sonne, sondern für jeden Körper K , der sich unter einer Kraft bewegt, die auf ein bestimmtes Zentrum gerichtet ist. Man spricht in diesem Fall von einer Zentralkraft. Zur Prüfung dieser Behauptung muss eine Gleichung zur Berechnung der Flächengeschwindigkeit hergeleitet werden. Unter dieser Flächengeschwindigkeit v_A verstehen wir das Verhältnis $A/\Delta t$. A ist die Fläche, welche in der Zeit Δt von der Verbindungsstrecke Körper-Zentrum (Länge = r) überstrichen wird. In der Abb.11.6 ist die Bewegung (rot) während eines kleinen Zeitabschnitts Δt dargestellt.

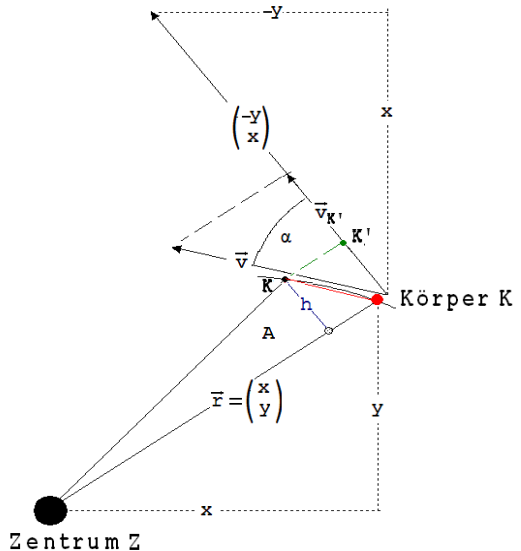


Abb.11.6

$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot |\mathbf{r}|; \quad v_A = A / \Delta t = \frac{1}{2} \cdot (h / \Delta t) \cdot |\mathbf{r}|$$

$(h / \Delta t) = |\mathbf{v}_K|$ ist die Geschwindigkeit von K', der Projektion von K auf den Vektor $\{-y, x\}$. $\{-y, x\}$ bildet mit $\mathbf{r} = \{x, y\}$ einen rechten Winkel.

$$v_A = A / \Delta t = 0,5 \cdot |\mathbf{v}_K| \cdot |\mathbf{r}|$$

Da $\{-y, x\}$ den gleichen Betrag wie $\mathbf{r}$ hat, können wir den Betrag $|\mathbf{r}|$ durch $|\{-y, x\}|$ ersetzen.

$$v_A = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{v}_K| \cdot |\{-y, x\}|; \quad |\mathbf{v}_K| = |\mathbf{v}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$v_A = |\mathbf{v}| \cdot |\{-y, x\}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$v_A = |\mathbf{v}| \cdot |\{-y, x\}| \cdot \cos(\alpha) = \mathbf{v} \cdot \{-y, x\} \quad (\text{Skalarprodukt!})$$

$$\mathbf{v} = \{v_x, v_y\} = \{v_1, v_2\}$$

↓

$$v_A = 0,5 \cdot (-v_1 \cdot y + v_2 \cdot x)$$

Behauptung: dv_A/dt ist im Fall einer Zentralkraft gleich 0 und v_A dementsprechend konstant.

Beweis: $dv_A/dt = 0,5 \cdot [-(dv_1/dt) \cdot y - v_1 \cdot dy/dt + (dv_2/dt) \cdot x + v_2 \cdot dx/dt]$

Produktregel der Differentialrechnung !

$$dx/dt = v_1, \quad dy/dt = v_2, \quad dv_2/dt = a_2, \quad dv_1/dt = a_1$$

$$dv_A/dt = 0,5 \cdot (-a_1 \cdot y - v_1 \cdot v_2 + a_2 \cdot x + v_2 \cdot v_1) = 0,5 \cdot (-a_1 \cdot y + a_2 \cdot x)$$

$$dv_A/dt = 0,5 \cdot \{a_1, a_2\} \cdot \{-y, x\}, \quad \{a_1, a_2\} \perp \{-y, x\} \rightarrow \{a_1, a_2\} \cdot \{-y, x\} = 0 \rightarrow dv_A/dt = 0$$

Demnach ist v_A während einer Bewegung unter einer Zentralkraft konstant. Das zweite Keplersche Gesetz ist somit bewiesen.

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren

Der Flächengeschwindigkeit ordnen wir einen Vektor $\mathbf{v}_A$ mit $|\mathbf{v}_A| = v_A$ zu, der mit seiner Richtung die Orientierung der Ebene E anzeigt, in der sich der Vektor $\mathbf{r}$ dreht. $\mathbf{v}_A$ steht definitionsgemäß so senkrecht auf E, dass ein Betrachter mit Blick auf seine Vektorspitze den rotierenden Körper K in einer Linksdrehung (positive Drehung) sieht.

$$\mathbf{v}_A \text{ bei einer Bewegung in der x-y-Ebene} = \{0; 0; 0,5 \cdot (x \cdot v_2 - y \cdot v_1)\}$$

$$\mathbf{v}_A \text{ bei einer Bewegung in der x-z-Ebene} = \{0; 0,5 \cdot (-x \cdot v_3 + z \cdot v_1); 0\}$$

$$\mathbf{v}_A \text{ bei einer Bewegung in der y-z-Ebene} = \{0,5 \cdot (y \cdot v_3 - z \cdot v_2); 0; 0\}$$

Dreht sich K in einer anderen Ebene, dann stehen diese Vektoren für die Flächengeschwindigkeiten der orthogonalen Projektionen K_1 , K_2 und K_3 von K auf die x-y-Ebene, auf die x-z-Ebene und y-z-Ebene.

Vermutlich ist dann der Vektor $\mathbf{v}^* = 0,5 \cdot \{(y \cdot v_3 - z \cdot v_2); (-x \cdot v_3 + z \cdot v_1); (x \cdot v_2 - y \cdot v_1)\}$ gleich $\mathbf{v}_A$. Zum Beweis werden die Skalarprodukte $\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{r}$ und $\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}$ gebildet. Sie sind gleich 0. $\mathbf{v}^*$ steht dementsprechend auf der durch $\mathbf{r}$ und $\mathbf{v}$ aufgespannten Ebene E senkrecht. Zum Beweis von $|\mathbf{v}_A| = |\mathbf{v}^*|$ wird das Quadrat der doppelten Flächengeschwindigkeit $(2 \cdot \mathbf{v}_A)^2$

ermittelt und mit $(2 \cdot \mathbf{v}^*)^2$ verglichen.

$$(2 \cdot \mathbf{v}_A)^2 = (|\mathbf{v}_K| \cdot |\mathbf{r}|)^2 \quad (\text{siehe Abb.11.7})$$

$$(|\mathbf{v}_K| \cdot |\mathbf{r}|)^2 = (|\mathbf{v}| \cdot \sin(\beta) \cdot |\mathbf{r}|)^2 = |\mathbf{v}|^2 \cdot |\mathbf{r}|^2 \cdot \sin^2(\beta)$$

$$\sin^2(\beta) = [1 - \cos^2(\beta)], \quad |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}|$$

$$|\mathbf{v}|^2 \cdot |\mathbf{r}|^2 \cdot \sin^2(\beta) = \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{r}^2 - [|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{r}| \cdot \cos(\beta)]^2$$

$$|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{r}| \cdot \cos(\beta) = \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{r}) \quad \text{Skalarprodukt!}$$

$$(2 \cdot \mathbf{v}_A)^2 = \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{r}^2 - [\mathbf{v} \cdot (-\mathbf{r})]^2, \quad [\mathbf{v} \cdot (-\mathbf{r})]^2 = [\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}]^2$$

$$(2 \cdot \mathbf{v}_A)^2 = \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{r}^2 - [\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}]^2$$

$$\mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{r}^2 - [\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}]^2 = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) - (x \cdot v_1 + y \cdot v_2 + z \cdot v_3)^2$$

Die Gleichheit von $(2 \cdot \mathbf{v}_A)^2 = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) - (x \cdot v_1 + y \cdot v_2 + z \cdot v_3)^2$

und $(2 \cdot \mathbf{v}^*)^2 = (y \cdot v_3 - z \cdot v_2)^2 + (z \cdot v_1 - x \cdot v_3)^2 + (x \cdot v_2 - y \cdot v_1)^2$

erkennt man nach Ausmultiplikation beider Terme.

Der Vektor $\{ y \cdot v_3 - z \cdot v_2; z \cdot v_1 - x \cdot v_3; x \cdot v_2 - y \cdot v_1 \}$ wird **Kreuzprodukt $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$** aus den Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{v}$ genannt. Diese Bezeichnung verdankt der angegebene Vektor der nun folgenden Regel zur Berechnung seiner Koordinaten.

Die Koordinaten der beiden Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{v}$ werden nebeneinander in Säulen angeordnet.

x	v_1	Zur Berechnung der x - Koordinate wird diese 1. Zeile gestrichen
y	v_2	Zur Berechnung der y - Koordinate wird diese 2. Zeile gestrichen
z	v_3	Zur Berechnung der z - Koordinate wird diese 3. Zeile gestrichen

Zur Berechnung der n. Koordinate von $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ wird die n. Zeile gestrichen. Anschließend wird der erste Wert der verkürzten 1. Spalte mit dem zweiten Wert der anderen Spalte und hiernach der zweite Wert der ersten mit dem ersten Wert der zweiten Spalte multipliziert. Schließlich wird das zweite Produkt vom ersten subtrahiert. **Bei Berechnung der y-Koordinate ist dann noch das Vorzeichen der Differenz umzukehren.**

Es muss angemerkt werden, dass Kreuzprodukte nicht nur aus Orts- und Geschwindigkeitsvektoren, sondern aus vielerlei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ gebildet wird.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \{ a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2; a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3; a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \}$$

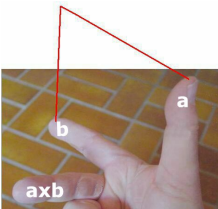


Abb.11.8

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ verhalten sich der Richtung nach wie der Daumen, der Zeige- und der Mittelfinger der rechten Hand, wenn der Mittelfinger von den beiden anderen rechtwinklig abgespreizt ist (**Rechte-Hand-Regel**).

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms, wenn als Flächeneinheit ein Rechteck gewählt wird mit der Einheit von $\mathbf{a}$ als Länge und der Einheit von $\mathbf{b}$ als Breite.

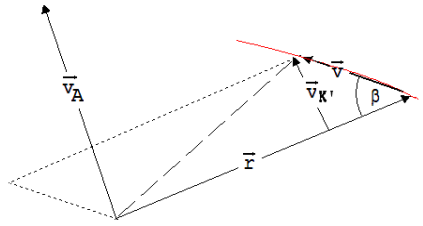


Abb.11.7

11.5 Masse der Sonne

Zur Berechnung einer Planetenbahn wurde als Masse der Sonne der Wert $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ angegeben.

Wie konnte dieser Wert bestimmt werden ?

Die Bahn der Erde um die Sonne ist fast kreisförmig (Radius $r \approx 150 \cdot 10^9 \text{ m}$). Deshalb ist die Anziehungskraft F der Sonne auf die Erde die Zentripetalkraft $F = M_{\text{Erde}} \cdot \omega^2 \cdot r$.

$$F = G \cdot (M_{\text{Sonne}} \cdot M_{\text{Erde}}) / r^2 = M_{\text{Erde}} \cdot (2 \cdot \pi / T)^2 \cdot r ; \quad T \text{ ist die Zeit eines Jahres}$$

$$M_{\text{Sonne}} = 4 \cdot \pi^2 \cdot r^3 / (T^2 \cdot G) = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

11.6 Newtons Herleitung des Gravitationsgesetzes

Als Bahn eines Planeten mit der Masse m_p und der Winkelgeschwindigkeit ω wird eine Kreisbahn vorausgesetzt. Die Kraft der Sonne auf den Planeten ist in diesem Fall die Zentripetalkraft F .

$$F = m_p \cdot \omega^2 \cdot r = m_p \cdot (2 \cdot \pi / T)^2 \cdot r = m_p \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r / T^2$$

Es wird eine Gleichung gesucht, die F ausschließlich in seiner Abhängigkeit von r und den Massen m_{Sonne} und m_{Planet} zeigt. Mit Hilfe des 3. Keplerschen Gesetzes kann die Umlaufzeit T durch r ersetzt werden.

$$r^3 / T^2 = \text{Konstante} = K \rightarrow T^2 = r^3 / K \rightarrow F = m_p \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot K / r^2$$

$$\text{Hieraus schließen wir: 1.) } F \sim 1/r^2; \quad 2.) F \sim m_p$$

Wenn die Kraft der Sonne auf den Planeten der Planetenmasse proportional ist, dann muss diese Kraft - sie ist nach dem Wechselwirkungsgesetz dem Betrage nach gleich der Kraft des Planeten auf die Sonne - auch der Sonnenmasse m_s proportional sein ($F \sim m_s$).

$$F \sim m_p; \quad F \sim m_s; \quad F \sim 1/r^2 \rightarrow F \sim m_p \cdot m_s / r^2$$

Newton hat $F \sim m_p \cdot m_s / r^2$ in der hier beschriebenen Weise hergeleitet. Die Gravitationskonstante blieb ihm unbekannt.

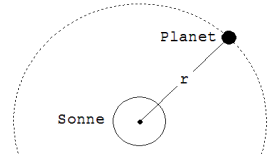


Abb.11.9

12. Arbeit, Leistung, Energie

12.1 Arbeit, Leistung



Abb.12.1

Wird ein Gegenstand mit einer bestimmten Kraft F verschoben, dann spricht man von einer Arbeit W (work).

Es erscheint sinnvoll, von einer Verdopplung der Arbeit zu sprechen, wenn entweder die Verschiebung s oder die Kraft F verdoppelt wird. Dieser Auffassung entspricht das Produkt $F \cdot s = W$ als Maß der Arbeit.

$$W = F \cdot s$$

Einheit von W : $N \cdot m = J$ (Joule).

Zur Verrichtung einer Arbeit können verschiedene Hilfsmittel herangezogen werden. Bekannte Hilfsmittel sind der Flaschenzug, die schiefe Ebene, der Hebel usw..

Ein Arbeitsmaß kann man nur dann als sinnvoll anerkennen, wenn sein Wert nur von den Zuständen vor und nach der Arbeit, nicht aber von der Art der Ausführung abhängt. So sollte die Arbeit W zum Anheben eines 10 kg -Gewichts um 1 m nicht davon abhängen ob das

Gewicht mit Rolle und Seil oder stattdessen mit einem Flaschenzug hochgezogen wird. An den in der Abb.12.2 skizzierten Aufzügen ist erkennbar, dass die Arbeit unabhängig vom verwendeten Hilfsmittel ist.

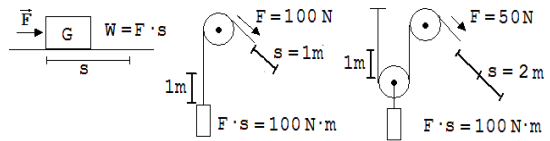


Abb.12.2

Bei der Definition des Arbeitsmaßes wurde zunächst daran gedacht, dass die Verschiebung und die Kraft gleiche Richtungen haben. Wenn die Kraft sich so verhält, wie dies in Abb.12.3 angedeutet ist, dann erscheint es sinnvoll zur Berechnung der Arbeit nur die Kraftkomponente F_p in Richtung der Verschiebung zu nehmen.

$$W = F_p \cdot s; F_p = F \cdot \cos(\alpha)$$

$$W = F \cdot \cos(\alpha) \cdot s = F \cdot s \cdot \cos(\alpha)$$

$F \cdot s \cdot \cos(\alpha)$ ist das Skalarprodukt aus dem Kraftvektor $\mathbf{F}$ und dem Verschiebungsvektor $\mathbf{s}$.

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F_1 \cdot s_1 + F_2 \cdot s_2 + F_3 \cdot s_3$$

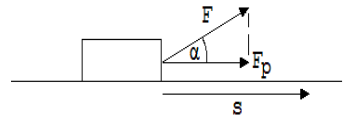


Abb.12.3

Nach der zur Abb.12.3 gegebenen allgemeinen Definition des Arbeitsmaßes erhält man eine negative Arbeit, wenn die Kraft der Verschiebung entgegen gerichtet ist ($\cos(\alpha) < 0$). Dies ist z.B. dann der Fall, wenn jemand einen rollenden Wagen bremst.

Eine Arbeit von z.B. 1000 J ist unterschiedlich zu bewerten, je nachdem ob sie in 10 s oder 1000 s verrichtet wird. Im ersten Fall wird von höherer Leistung gesprochen. Unter Leistung versteht man die in einer Zeiteinheit verrichtete Arbeit.

$$\text{Leistung } P(\text{power}) = W / t,$$

$$\text{Einheit: Joule / Sekunde} = \text{Watt (W)}.$$

12.2 Energie (Perpetuum-Mobile)

Im den letzten Jahrhunderten wurde immer wieder der Bau eines „Perpetuum Mobile“ versucht. Unter einem solchen Gerät versteht man eine periodisch arbeitende Maschine, die ohne Eingriffe von außen fortwährend Arbeit verrichtet und sich dabei nicht verändert. Man könnte die in Abb.12.4 skizzierte Anordnung für ein „Perpetuum Mobile“ halten.

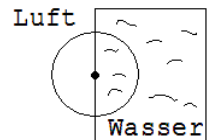


Abb.12.4

Die eine Hälfte eines Holzrades befindet sich in einem mit Wasser gefüllten Behälter, die andere in Luft. Eine Gummidichtung in der Behälterwand schließt die Lücke zwischen dem Rad und der Behälterwand.

Es könnte folgende Meinung vertreten werden:

Das Holzrad erfährt im Wasser einen Auftrieb, der eine Linksdrehung bewirkt.

Leider ist diese Vorstellung falsch, denn bekanntlich wirken die durch den Wasserdruck bedingten Kräfte senkrecht zur Oberfläche und haben somit kein Drehmoment.

Die Erfolglosigkeit auf der Suche nach einem Perpetuum Mobile gab schließlich Anlass zu der Aussage:

Ein Perpetuum-Mobile ist unmöglich.

Folgerung: Die Arbeit, die von einem System verrichtet werden kann, ist nur von ihrem Anfangs- und Endzustand, nicht aber von der Art und Weise der Änderung abhängig.

Diese Erklärung ist nicht bewiesen, sie wird aber durch viele richtige Folgerungen bestätigt. Eine periodisch arbeitenden Maschine kann demnach ohne Einwirkung von außen keine Arbeit verrichten, weil sie immer wieder gleiche Zustände durchläuft.
Die Arbeit, die von einem System beim Übergang von einem Zustand A in einen Zustand B verrichtet wird, nennen wir seine Energie im Zustand A in Bezug auf den Zustand B.

12.3 Energiearten

Lageenergie

Ein Körper G der Masse m zieht einen Bremsklotz K gleichförmig über eine waagrechte Fläche. Die Bremskraft von K gleicht der Gewichtskraft von G. G verschiebt K nach einem leichten Stoß um die Strecke h und verrichtet hierbei die Arbeit $W = m \cdot g \cdot h$. G hatte demnach in Bezug auf den Boden die Energie $E = m \cdot g \cdot h$.

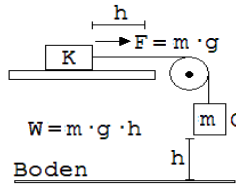


Abb.12.5



Abb.12.6

Spannungsenergie

Eine um s gedehnte Schraubenfeder mit der Federkonstanten D wird mit der Hand langsam entspannt. Hierbei nimmt die Kraft von dem Wert $D \cdot s$ auf den Wert 0 ab. Die mittlere Kraft ist $(D \cdot s + 0) / 2 = D \cdot s / 2$. Während der Entspannung verrichtet die Feder die Arbeit $W = (D \cdot s / 2) \cdot s = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$. Sie hatte demnach im gespannten Zustand die Energie $E = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$.

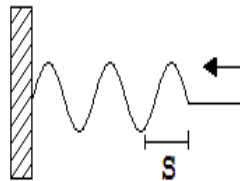


Abb.12.7



Abb.12.8

Bewegungsenergie (kinetische Energie)

Ein Wagen der Masse m und der Geschwindigkeit v wird mit Hilfe einer Fadenbremse (Büroklammer) auf die Geschwindigkeit 0 abgebremst. Hierbei verrichtet er gegen den Faden die Arbeit $W = F \cdot s$. F ist die Bremskraft und s der Bremsweg. Den Bremsweg s erhält man als Produkt aus der mittleren Geschwindigkeit $v/2$ und der Bremszeit t.

$$s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t, \text{ Bremskraft } F = m \cdot v / t$$



$$E = F \cdot s = m \cdot v^2 / 2$$

Ein besonders eindrucksvolles Experiment zur kinetischen Energie ist in der Abb.12.11 angedeutet. Ein Elektromotor dreht einen Eisenzylinder ($m = 420 \text{ g}$, $r = 3 \text{ cm}$) auf ca. 100 Hz.

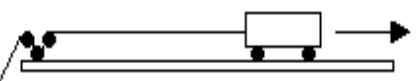


Abb.12.9



Abb.12.10



Abb.12.11

Anschließend werden die Anschlüsse des Motors mit einem Glühbirnchen verbunden. Dieses leuchtet dann ungefähr eine Minute lang. Rotierende Zylinder werden bei Experimenten zur Kernfusion zur kurzzeitigen Erzeugung derart hoher elektrischer Leistungen eingesetzt, die nicht aus dem Leitungsnetz entnommen werden können.

Welche kinetische Energie hat der in der letzten Abbildung sichtbare Zylinder bei 100 Umdrehungen pro Sekunde ?

Zur Berechnung dieser Energie denken wir uns den Zylinder (siehe Abb.12.12) mit dem Radius R , der Masse m und der Länge L in n konzentrische, dünnwandige Hohlzylinder mit den Radien r_K und den Wanddicken $d = R/n$ eingeteilt (Bsp.: $n = 1000$).

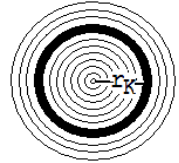


Abb.12.12

Für die Rotationsenergie e eines solchen Hohlzylinders mit der Masse m_K , dem Radius r_K und der Rotationsgeschwindigkeit v_K gilt:

$$e = m_K \cdot v_K^2 / 2; \quad v_K = \text{Geschwindigkeit eines Punktes auf dem Hohlzylinder}$$

$$v_K = 2 \cdot \pi \cdot r_K / T; \quad T = \text{Umdrehungszeit} \rightarrow v_K = (2 \cdot \pi / T) \cdot r_K$$

$$(2 \cdot \pi / T) \text{ ist die Winkelgeschwindigkeit } \omega.$$

In der Zeit T dreht sich der Zylinder um den Winkel $2 \cdot \pi$ (Bogenmaß).

$$e = m_K \cdot v_K^2 / 2, \quad v_K = \omega \cdot r_K \rightarrow e = m_K \cdot (\omega \cdot r_K)^2 / 2 = m_K \cdot r_K^2 \cdot \omega^2 / 2$$

Wenn wir die Hohlzylinder mit den Zahlen von 1 bis n durchnummerieren, dann können wir für die gesamte Rotationsenergie E_{rot} schreiben:

$$E_{\text{rot}} = (m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + \dots + m_n \cdot r_n^2) \cdot \omega^2 / 2 \rightarrow E_{\text{rot}} = J \cdot \omega^2 / 2$$

$(m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + \dots + m_n \cdot r_n^2)$ heißt Trägheitsmoment J .

Für einen Zylinders mit der Masse m und dem Radius R gilt: $J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$

$J = 0,5 \cdot 0,42 \text{ kg} \cdot (0,03 \text{ m})^2 = 0,000189 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ist demnach das Trägheitsmoment des in der Abb.12.11 abgebildeten Zylinders.

Seine kinetische Energie bei 100 Hz ist $J \cdot \omega^2 / 2 = 0,000189 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot 100 \text{ Hz})^2 / 2 = 37 \text{ Joule}$.

Herleitung des Trägheitsmoments $J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$ eines Zylinders

Wir stellen uns vor, der Radius r der Zylinders der Länge L werde um Δr vergrößert. Wir bestimmen den zugehörigen Zuwachs ΔJ des Trägheitsmoments mit der Absicht dJ/dr und daraufhin J als Funktion von r zu finden,

$$\Delta J \approx 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \Delta r \cdot \rho \cdot r^2 \rightarrow \Delta J / \Delta r \approx 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \rho \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot \rho \cdot r^3$$

$2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \Delta r$ steht für die Zunahme des Zylindervolumens und ρ für die Dichte des Materials. Das Zeichen $\approx$ wurde statt eines Gleichheitszeichens gewählt. Für r müsste ein Wert zwischen r und $r + \Delta r$ stehen. Mit kleiner werdendem Δr geht der dadurch bedingte Fehler von $\Delta J / \Delta r$ gegen 0, so dass wir schreiben können:

$$dJ/dr = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot \rho \cdot r^3 \rightarrow J = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot \rho \cdot r^4 / 4 = \frac{1}{2} \cdot [\pi \cdot r^2 \cdot L \cdot \rho] \cdot r^2$$

$$(\pi \cdot r^2 \cdot L \cdot \rho) \text{ ist die Masse } m \text{ des Zylinders} \rightarrow J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$$

12.4 Satz von der Erhaltung der Energie

Die Arbeit, die von einem System von Gegenständen verrichtet wird, hängt nur vom Anfangs- und Endzustand dieses Systems ab. **Dies lässt folgenden Schluss zu:** In Bezug auf die Energieänderung eines Systems S ist es gleichgültig ob man S sofort von einem Zustand A in einen Zustand B überführt, oder ob man S sich einige Zeit selbst überlässt und dann in den Zustand B bringt. In beiden Fällen wird die gleiche Energie abgegeben. Daraus folgt, dass bei Wechselwirkungen innerhalb des Systems die Gesamtenergie unverändert bleibt. Somit können wir sagen:

Die Energie eines abgeschlossenen Systems bleibt konstant.

Nach diesem Satz gilt: Eine Arbeit W die von einem Teilnehmer A des Systems gegen einen anderen Teilnehmer B verrichtet wird, führt dazu, dass die Energie von A um W abnimmt und die Energie von B um W zunimmt.

Der Energieerhaltungssatz erscheint ungültig, wenn eine Bewegung durch Reibung beeinträchtigt wird. Dies ist jedoch nicht der Fall, denn die Erwärmung der reibenden Gegenstände zeigt an, dass die Atome in den Gegenständen schneller werden und dementsprechend die scheinbar bei Reibung verloren gegangene Energie übernehmen.

12.5 Anwendungsbeispiele zum Energieerhaltungssatz

1. Beispiel: Der Druck des Wassers in Abhängigkeit von der Wassertiefe

Im Kapitel 8 wurde zur Berechnung des Wasserdrucks p in einer Wassertiefe h die Gleichung $p = h \cdot g \cdot \rho$ angegeben (ρ = Dichte des Wassers). Bei der Herleitung wurde der Druck p auf eine parallel zur Wasseroberfläche liegende Fläche berechnet. Aus dieser Herleitung kann nicht geschlossen werden, dass die entwickelte Formel auch dann gilt, wenn die Fläche, die den Druck aufnimmt, eine andere Orientierung hat. Nun kann $p = h \cdot g \cdot \rho$ ohne Beschränkung auf eine bestimmte Lage dieser Fläche hergeleitet werden. In ein Wasserbecken ist ein

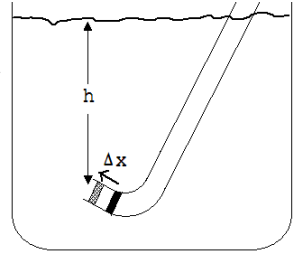


Abb.12.13

gebogenes Glasrohr eingetaucht, dessen unteres Ende mit einem beweglichen Kolben (Querschnitt A) abgeschlossen ist. Die Kraft F des Wassers auf diesen Kolben gleicht der Gegenkraft, die aufgebracht werden muss, um den Kolben in seiner Stellung zu halten. In Gedanken wird dieser Kolben bis zum Ende des Rohrs um ein kleines Stück Δx gegen das Wasser verschoben, wobei er eine geringe Wassermenge mit der Masse m verdrängt.

Während die Arbeit $W = F \cdot \Delta x$ verrichtet wird, steigt der Wasserspiegel geringfügig an. Es verhält sich so, als ob die aus dem Kolben verdrängte Wassermenge an die Oberfläche geschoben worden sei. Die Lageenergie des Wasser nimmt demnach um $m \cdot g \cdot h$ zu.

$$F \cdot \Delta x = m \cdot g \cdot h, \quad m = A \cdot \Delta x \cdot \rho \rightarrow F \cdot \Delta x = A \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot g \cdot h \rightarrow p = F/A = \rho \cdot g \cdot h$$

2. Beispiel: Kinetische Energie eines fallenden Gegenstandes

Es soll unter Anwendung des Energieerhaltungssatzes die Geschwindigkeit v berechnet werden, mit der ein aus der Höhe h fallender Körper K die Erde trifft.

Die Erde E und der Körper K bilden in diesem Fall ein abgeschlossenes System.

$$\text{Es gilt: } m_K \cdot g \cdot h = m_K \cdot v_K^2 / 2 + m_E \cdot v_E^2 / 2$$

Gesamte kinetische Energie = kinetische Energie von K + kinetische Energie der Erde !

Die linke Seite der Gleichung steht für die Lageenergie (potentielle Energie) vor dem Fall, die rechte für die gesamte kinetische Energie danach. Unter Anwendung des Impulssatzes können wir zeigen, dass die kinetische Energie der Erde vernachlässigt werden kann.

$$m_E \cdot v_E = m_K \cdot v_K \rightarrow v_E = (m_K / m_E) \cdot v_K$$

$$m_E \cdot v_E^2 / 2 = m_E \cdot (m_K / m_E)^2 \cdot v_K^2 / 2 = m_K \cdot (m_K / m_E) \cdot v_K^2 / 2$$

Wegen $m_K / m_E \ll 1$ ist $m_E \cdot v_E^2 / 2$ gegenüber $m_K \cdot v_K^2 / 2$ vernachlässigbar klein.

$$m_K \cdot h \cdot g = m_K \cdot v_K^2 / 2 \rightarrow h \cdot g \cdot 2 = v_K^2 \rightarrow v_K = \sqrt{h \cdot g \cdot 2}$$

3.Beispiel: Rollbewegung auf einer schiefen Ebene

Wir lassen einen massiven Zylinder Z ($m = 200\text{g}$) mit dem Radius R und der Länge L und anschließend einen gleich schweren Wagen W die um α geneigte Experimentierwippe herab rollen. In beiden Fällen wird vor der Drehung um α ein für das Experimentierobjekt passender Reibungsausgleich durchgeführt. An den s - t -Diagrammen in Abb.12.14 ist erkennbar, dass der Wagen einen Weg s in kürzerer Zeit zurücklegt als der Zylinder. Die Momentangeschwindigkeiten am Ende des Weges erhalten wir nach $v = 2 \cdot s/t$ (gleichförmig-beschleunigte Bewegung). t ist die Zeit für den Weg s . Aus den am Diagramm ablesbaren Werten folgt:

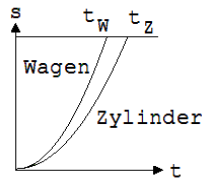


Abb.12.14

$$v_{\text{Zylinder}} / v_{\text{Wagen}} = (2 \cdot s / t_Z) / (2 \cdot s / t_W) = t_W / t_Z = 0,81.$$

Diese Tatsache verleitet zu dem Schluss:

$$\text{Energie}_{\text{Zylinder}} / \text{Energie}_{\text{Wagen}} = m \cdot v_Z^2 / m \cdot v_W^2 = 0,81^2 = 0,6561 \approx 2/3$$

Die Zylinderenergie erscheint um um 1/3 kleiner zu sein als die kinetische Energie des Wagens. Dies steht im Widerspruch zum Energieerhaltungssatz, denn die kinetischen Energien werden beim Durchlauf gleicher Höhendifferenzen angenommen.

Verständlich wird diese Tatsache dann, wenn man bedenkt, dass der Zylinder durch zwei Bewegungsformen ausgezeichnet ist. Während sich der Schwerpunkt mit v bewegt (Translation), rotiert der Zylinder um eine durch den Schwerpunkt laufende Achse. Auf diese Rotation entfällt offensichtlich 1/3 der Gesamtenergie. Die Rotationsenergie E_{Rot} fällt als zusätzliche Energie dann auf, wenn man den rollenden Zylinder an einer durch seine Mitte geführten Achse von der Bahn abhebt und die Achse ruhig hält. Der Zylinder rotiert nach diesem Bremsvorgang weiter.

$$\text{Es gilt: } E_{\text{Rot}} = J \cdot \omega^2 / 2, \quad \omega = v/R \rightarrow E_{\text{Rot}} = (J/R^2) \cdot v^2 / 2$$

$R \cdot \omega$ ist gleich der Geschwindigkeit v des Zylinderschwerpunkts. Dies ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, dass sich der Zylinder während einer Drehung in der Zeit T um $2 \cdot \pi \cdot R$ fortbewegt.

$$v = 2 \cdot \pi \cdot R / T = (2 \cdot \pi / T) \cdot R = \omega \cdot R$$

$$E_{\text{Rot}} = (J/R^2) \cdot v^2 / 2, \quad J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \rightarrow E_{\text{Rot}} = m \cdot v^2 / 4$$

Dies entspricht den oben angegebenen Versuchsergebnissen. $E_{\text{Rot}} = m \cdot v^2 / 4$ ist 1/3 der Gesamtenergie $E = E_{\text{Translation}} + E_{\text{rot}} = m \cdot v^2 / 2 + m \cdot v^2 / 4$.

Welchen Einfluss hat das Trägheitsmoment auf die Beschleunigung eines rollenden Gegenstands ?

Wir denken uns einen Zylinder Z (Radius R , Masse m), der auf einer schiefen Ebene eine Strecke s unter einer Hangabtriebskraft F herab rollt, dabei h an Höhe verliert und die Geschwindigkeit v erreicht.

$$F = m \cdot g \cdot \sin \alpha \rightarrow m \cdot g = F / \sin \alpha, \quad \sin \alpha = h/s \rightarrow m \cdot g \cdot h = F \cdot s$$

Seine Lageenergie nimmt um $m \cdot g \cdot h$ ab.

$$F \cdot s = m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 / 2 + \frac{1}{2} \cdot (J/R^2) \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot (m + J/R^2)$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot (a \cdot t) \cdot t = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t$$

$$F \cdot \frac{1}{2} \cdot v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot (m + J/R^2) \rightarrow F = (v/t) \cdot (m + J/R^2), \quad v/t = a$$

$$F = a \cdot (m + J/R^2) \rightarrow F - a \cdot J/R^2 = a \cdot m$$

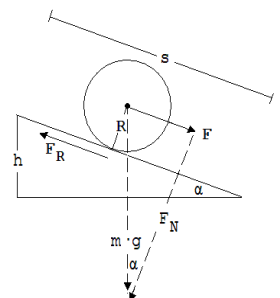


Abb.12.15

Erklärung: Neben der Hangabtriebskraft wirkt noch eine zweite von der Rollbahn ausgehende Kraft $F_R = a \cdot J/R^2$ auf den Zylinder. Sie ist für die Drehung maßgebend.

4. Beispiel : Über das Auslaufen einer Badewanne

Eine quaderförmige Badewanne mit dem Querschnitt $A = 0,8 \text{ m}^2$ läuft durch eine Öffnung am Boden mit dem Querschnitt $B = 10 \text{ cm}^2 = 0,001 \text{ m}^2$ aus. Anfängliches Wasservolumen $= 0,15 \text{ m}^3$.

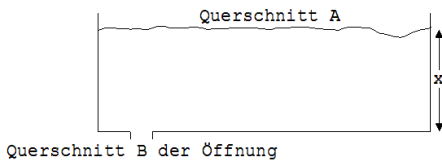


Abb.12.16

1. Mit welcher Geschwindigkeit tritt das Wasser aus diesem Loch ?

2. In welcher Zeit wird die Badewanne geleert ?

Diese beiden Fragen können mit Hilfe des Energiesatzes beantwortet werden.

Auf die Frage 1 ist schnell eine Antwort gefunden. Wenn eine kleine Wassermenge der Masse m' ausläuft, dann wird sie an der Oberfläche des Wassers vermisst. Die potenzielle Energie des Wassers nimmt um $m' \cdot g \cdot x$ ab (x = Höhe des Wasserspiegels). Das unten austretende Wasser hat die kinetische Energie $m' \cdot v^2 / 2$. Nach dem Energieerhaltungssatz gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot m' \cdot v^2 = m' \cdot g \cdot x \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot x}$$

Die anfängliche kinetische Energie des Wassers infolge der Sinkgeschwindigkeit ist vernachlässigbar klein. Aus dem Wasservolumen V und dem Querschnitt A der Badewanne kann x errechnet werden: $x \cdot A = V \rightarrow x = V/A$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot x} \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot V/A}$$

Nun kann auch die 2. Frage beantwortet werden.

$\Delta V = -v \cdot \Delta t \cdot B = -\sqrt{2 \cdot g \cdot V/A} \cdot \Delta t \cdot B$ ist das Volumen des Wassers, welches in einem kleinen Zeitabschnitt Δt aus der Wanne fließt (siehe Abb.12.17).



Abb.12.17

$$V_{\text{nach } \Delta t} = V_{\text{vor } \Delta t} - \sqrt{2 \cdot g \cdot V_{\text{vor } \Delta t} / A} \cdot \Delta t \cdot B$$

Mit dem Programm

$n=200; h=0,1; y=y-\text{wrz}(2*9,81$

$*y/0,8)*0,001*h; t=t+h; x=t;l=x;$

in <http://www.g-hoehne.de/Sim.html>

(Rechtsklick, in neuem Fenster öffnen) wird ein Diagramm (siehe Abb. 12.18) erzeugt, welches die Volumenabnahme in Abhängigkeit von der Zeit darstellt. Es ist zu sehen, dass eine Wanne mit einem Querschnitt $A = 0,8 \text{ m}^2$, welche anfangs $0,15 \text{ m}^3$ ausläuft. Wasser enthält, in

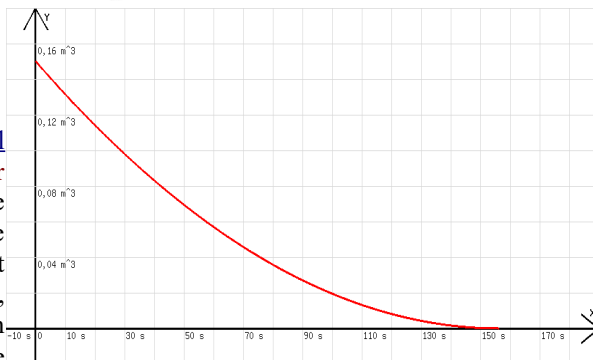


Abb.12.18

ca. $T=156 \text{ s}$ durch ein Loch mit dem Querschnitt $B = 10 \text{ cm}^2$ ausläuft.

$$\text{Beweis: } V_{\text{nach } \Delta t} - V_{\text{vor } \Delta t} = \Delta V \approx -\sqrt{2 \cdot g \cdot V_{\text{vor } \Delta t} / A} \cdot B \cdot \Delta t$$

$$dV/dt = -\sqrt{2 \cdot g \cdot V / A} \cdot B \rightarrow dt/dV = -\sqrt{A/(2 \cdot g \cdot B^2)} \cdot V^{-1/2}$$

Auf der Suche nach einer Funktion $t(V)$ mit $dt/dV = -\sqrt{A/(2 \cdot g \cdot B^2)} \cdot V^{-1/2}$ finden wir:

$$t = -\sqrt{A/(2 \cdot g \cdot B^2)} \cdot 2 \cdot V^{1/2} + \text{Konstante } C$$

Bei $V = 0$ (leeres Gefäß) ist $t = T$. Folglich gilt: Konstante $C = T$.

$$t = -\sqrt{A/(2 \cdot g \cdot B^2)} \cdot 2 \cdot V^{1/2} + T \rightarrow (t - T)^2 = A/(2 \cdot g \cdot B^2) \cdot 4 \cdot V = 2 \cdot A/(g \cdot B^2) \cdot V$$

$$(t - T)^2 \cdot g \cdot B^2 / (2 \cdot A) = V, \quad g \cdot B^2 / (2 \cdot A) = j, \quad V = j \cdot (t - T)^2$$

$$V_0 = j \cdot T^2 \rightarrow T = \sqrt{V_0 / j}$$

Für den hier beschriebenen Fall gilt: $j = g \cdot B^2 \cdot (A \cdot 2) = 6,131 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}^2 \rightarrow T = 156 \text{ s}$

Die hier gemachten Aussagen können leicht experimentell auf ihre Richtigkeit geprüft werden. Zu empfehlen ist eine Messanordnung, wie sie in der Abb.12.17 zu sehen ist. An der vorderen Schmalseite der Experimentierwippe hängt eine Dose mit einem Loch im Dosenboden. Wenn aus diesem Gefäß Wasser ausläuft, wird von dem an die Wippe angeschlossenen Computer eine abfallende Parabel gezeichnet.

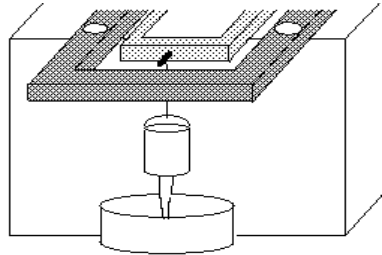


Abb.12.17

13 Trägheitskräfte

13.1 Was versteht man unter einer Trägheitskraft

Ein Omnibus fährt mit der Beschleunigung $\mathbf{a}$ an. Hierbei fällt ein im Omnibus frei stehender Passagier nach hinten. Er führt seine Beschleunigung im Omnibus auf eine der Erdanziehungskraft vergleichbare Kraft zurück, die ihn nach hinten zieht. Hält er sich an einem Sitz fest, dann wird er mit $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$ beschleunigt. Er meint jedoch, eine Kraft $\mathbf{F}_T = -m \cdot \mathbf{a}$ drücke ihn nach hinten und werde von einer vom Sitz ausgehenden Gegenkraft ausgeglichen. $\mathbf{F}_T$ ist eine Scheinkraft in einem beschleunigten Raum R ; wir nennen sie Trägheitskraft. Für eine Kraft $\mathbf{F}$ (z.B. für die vom Sitz des Omnibusses ausgehende Kraft) auf einen Körper K mit der Masse m in einem beschleunigten Raum R gilt:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}; \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}'; \quad \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}_B + m \cdot \mathbf{a}'; \quad m \cdot \mathbf{a}' = \mathbf{F} - m \cdot \mathbf{a}_B.$$

$\mathbf{a}_B$ ist der durch die Beschleunigung des Raums R und $\mathbf{a}'$ ist die Beschleunigung von K innerhalb des Raums R . Für einen Beobachter in R erscheint $m \cdot \mathbf{a}'$ gleich der Summe der auf K wirkenden Kräfte. Nach seiner Sichtweise wirkt neben $\mathbf{F}$ noch die Trägheitskraft $-m \cdot \mathbf{a}_B$. Wenn er meint, in einem ruhenden System zu sein, dann muss er bei seinen Rechnungen diese Trägheitskraft $-m \cdot \mathbf{a}_B$ berücksichtigen, nur dann kann er die Vorgänge in R richtig berechnen. Hält er sich im Omnibus an einem Sitz fest, dann gilt: $m \cdot \mathbf{F} - m \cdot \mathbf{a}_B = \mathbf{0}$. In diesem Fall ist die Trägheitskraft dem Betrage nach gleich der Kraft des Sitzes.

Die bekanntesten Trägheitskräfte sind die Zentrifugal- und die Corioliskraft, es sind Trägheitskräfte in einem rotierenden Raum.

13.2 Die Zentrifugalkraft

Abb.13.1 zeigt einen rotierenden, zylindrischen Raum in der Draufsicht (Rotor auf einem Jahrmarkt). Ein an der Außenwand stehender Mann P wird von einer Zentripetalkraft $F = m \cdot \omega^2 \cdot r$ auf einer Kreisbahn gehalten. P übt eine gleich große Gegenkraft F_T auf die Wand aus. Da sich P im rotierenden Raum als ruhend ansieht, erkennt er F_T nicht als Reaktion auf eine von der Wand ausgehenden, beschleunigenden Kraft. Er deutet sie stattdessen als eine aus der Ferne wirkende Kraft, der Gravitationskraft vergleichbar, die von ihm an die Wand weitergegeben wird und nennt sie **Zentrifugalkraft**.

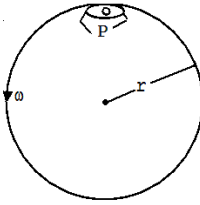


Abb.13.1

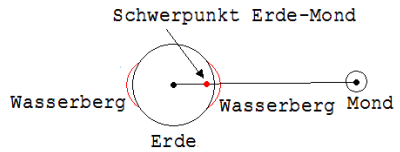


Abb.13.2

Die Zentrifugalkraft spielt eine Rolle bei der Bildung von Ebbe und Flut der Meere. Erde und Mond drehen sich um einen gemeinsamen Schwerpunkt (siehe Abb.13.2). Das Wasser der Meere unterliegt deshalb nicht nur der Anziehungskraft F_M des Mondes, sondern auch noch der durch die genannte Drehung bedingten Zentrifugalkraft F_Z . In der Erdmitte heben sich die beiden Kräfte auf. Auf der dem Mond abgewandten Seite überwiegt die Zentrifugalkraft und führt zur Bildung eines Wasserberges. Auf der dem Mond zugewandten Seite ist die Anziehungskraft des Mondes größer als die Zentrifugalkraft, rechts vom gemeinsamen Schwerpunkt Erde-Mond hat sie sogar die gleiche Richtung wie die Zentrifugalkraft. Auch dort entsteht infolgedessen ein Wasserberg. Die Erde dreht sich unter diesen Wasserbergen. Aus der Sicht eines Erdenbewohners laufen in 24 Stunden zwei Wasserberge über die Erdkugel, die sich jeweils mit einer Flut ankündigen.

Aufgaben

1. Ein Kind dreht sich in einem Kettenkarussell so, wie dies in der Abb.13.3 angedeutet ist.

Welche Geschwindigkeit hat das Kind ?

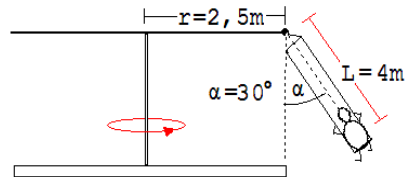


Abb.13.3

2. Eine mit Wasser gefüllte Küvette rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 15\text{s}^{-1}$ um ihre Symmetrieachse. Hierbei bildet das Wasser eine parabelförmige Oberfläche aus.

Bestimme den Funktionsgraphen $y = k \cdot x^2$ der zugehörigen Parabel !

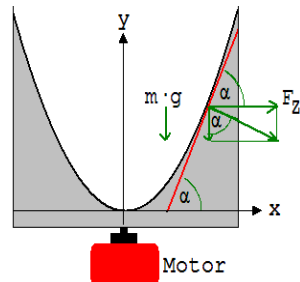


Abb.13.4

3. Auf einer um eine senkrechte Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\text{s}^{-1}$ rotierenden Scheibe schwingt eine von einem Stab geführte Kugel K der Masse $m = 100\text{ g}$ um den Scheibenmittelpunkt. Die Schwingungsfrequenz der Kugel auf einer ruhenden Scheibe beträgt 1 Hz . Mit welcher Frequenz schwingt die Kugel auf der rotierenden Scheibe?

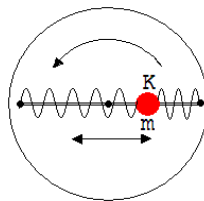


Abb.13.5

13.3 Die Corioliskraft

13.3.1 Der Coriolis-Durchflussmesser

In Abfüllanlagen findet man manchmal große, vibrierende Röhren, mit denen durchfließende Flüssigkeitsmassen mit sehr hoher Genauigkeit gemessen werden können. Es heißt, die Fließgeschwindigkeit (der Massedurchfluss) werde mit Hilfe einer Corioliskraft bestimmt.

Was ist dies für eine Kraft und wie kommt sie zustande?

Aufbau und Funktionsweise eines Coriolisdurchflussmessers

In Abb.13.6 sehen wir ein gebogenes, von Wasser durchflossenes Rohr (Fließgeschwindigkeit v). Wenn dieses am Boden befestigte Rohr so zum Schwingen angeregt wird, wie es die beiden Pfeile am Scheitel des Rohrs in der Abb.13.6 anzeigen, dann machen sich am linken und rechten Schenkel hin- und her biegende Kräfte F bemerkbar, unter denen das Rohr noch eine Drehschwingung um die in der Abb.13.7 gezeichnete Achse

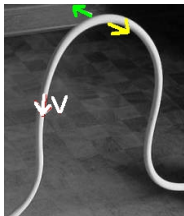


Abb.13.6

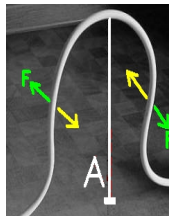


Abb.13.7

A ausführt. Die zur Strömungsgeschwindigkeit v proportionale Amplitude dieser Drehschwingung ermöglicht die Bestimmung von v mit sehr hoher Genauigkeit. Im Handel (Hersteller: Firma Endress+Hauser in Reinach bei Basel) gibt es Coriolis-Masseflussmeßgeräte für unterschiedlichen Bedarf über mehr als sieben Größenordnungen (von etwa 20 kg/s bis etwa 600 kg/s) mit großer Genauigkeit ($0,1\%$).

Wie kommt es zu diesen Kräften F ?

Zur Erklärung dient die Abb.13.8. Zu sehen ist eine kleine Lokomotive auf einer Schiene, die auf einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Scheibe liegt. Die in Bezug auf die Scheibe mit konstanter Geschwindigkeit v fahrende Lokomotive habe zum Zeitpunkt $t = 0$ die Rotationsachse überquert. Zu diesem Zeitpunkt sei die Schiene zur x -Achse eines **über der Scheibe ruhenden** Koordinatensystems (rot) parallel verlaufen.

Die Lokomotive übt eine Kraft F_q quer zur Bewegungsrichtung aus. Die Existenz dieser auf die Schiene wirkenden Kraft F_q kann leicht begründet werden. Die Lokomotive bewegt sich aus der Sicht eines auf die Scheibe schauenden, ruhenden Beobachters B nicht nur entlang der Schiene. Infolge der Rotation wird die Lokomotive quer zur Schiene beschleunigt. Wenn die x -Achse des Koordinatensystems mit der Schiene einen sehr kleinen Winkel bildet, dann gilt für orthogonale Kraftkomponente F_q , mit der die Schiene auf die Lokomotive einwirkt: $F_q = m \cdot a_y$.

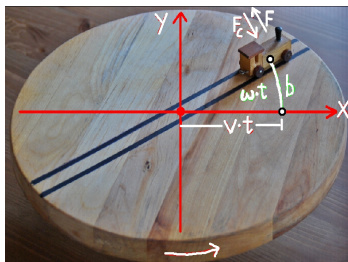


Abb.13.8

Der y -Wert, den die Lokomotive nach Überqueren der Rotationsachse in einer Zeit t annimmt, weicht bei kleinem t (kleinem Winkel) nur wenig vom Bogen b ab, weshalb unter dieser Bedingung $y = b$ geschrieben werden kann.

$$\omega \cdot t = b / (v \cdot t) \text{ Bogenmaß!} \rightarrow y = b = \omega \cdot v \cdot t^2$$

v ist die Geschwindigkeit der Lokomotive aus der Sicht von B' .

Ein solcher Term mit t^2 beschreibt eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung a_y .

$$\text{Es gilt: } y = (a_y / 2) \cdot t^2, \quad y = \omega \cdot v \cdot t^2 \rightarrow a_y = 2 \cdot v \cdot \omega \rightarrow F_q = 2 \cdot m \cdot v \cdot \omega$$

Ein auf der rotierenden Scheibe sitzender Beobachter B' kann keine Beschleunigung an der Lokomotive erkennen. Für ihn bewegt sie sich gleichförmig auf einer geraden Spur und erfährt keine beschleunigende Kraft durch die Schiene. Ihm fällt aber die nach dem Wechselwirkungsgesetz zu erwartende Gegenkraft F_C zu F_q auf, welche die Lokomotive auf die Schiene ausübt und er denkt sich, die Lokomotive übertrage eine aus der Ferne wirkende Kraft F_C auf die Schiene. Er nennt sie **Corioliskraft** (Coriol ist ein französischer Mathematiker, der sich mit diesem Phänomen beschäftigt hat).

Bei jeder Bewegung auf der rotierenden Scheibe wirkt aus der Sicht von B' eine Corioliskraft $F_C = 2 \cdot m \cdot v \cdot \omega$ (Gegenkraft zu F_q) quer zur Bewegungsrichtung auf den bewegten Körper. Ein das bewegte Objekt begleitender Beobachter registriert bei einer Linksdrehung (Draufsicht) eine nach rechts und bei einer Rechtsdrehung eine nach links wirkende Corioliskraft.

Messung der vom Wasserstrom verursachten Corioliskraft

Zum Nachweis dieser Kraft im Unterricht eignet sich die in Abb.13.9 dargestellte Anordnung. Zu sehen ist ein von Wasser durchflossenes U-Rohr mit der Höhe r (Radius) und der Breite b , welches um eine waagrechte Achse pendelt, die von der beweglichen Glasplatte der Experimentierwippe gehalten wird. Ein Elektromotor bewirkt ein gleichmäßiges Pendeln mit kleiner Amplitude. Er dreht ein Rad, auf dem ein Stäbchen S exzentrisch, parallel zu Drehachse angeschraubt ist. Das mit der Geschwindigkeit v_S rotierende Stäbchen S ist über einen Faden mit dem U-Rohr verbunden. Ein an einer Wand hinter dem U-Rohr angebundener Gummifaden (gestrichelt) sorgt dafür, dass dieser Faden während der Drehung von S gespannt bleibt. Das U-Rohr rotiert mit veränderlicher Winkelgeschwindigkeit ω . ω hat dann ein Maximum, wenn der waagrechte Teil des U-Rohrs die Geschwindigkeit v_S des rotierenden Stäbchens hat.

$\omega_{\max} = v_S / r$. Man stelle sich einen Beobachter B vor

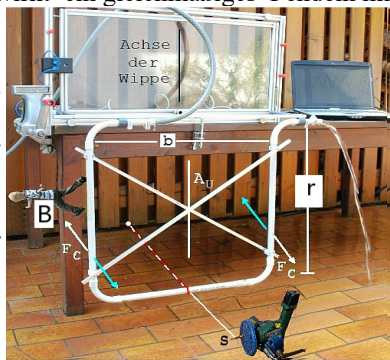


Abb.13.9

(siehe Abb.13.9), der auf dem linken Schenkel des Rohrs der Strömung folgt. Da das Rohr zu seinen Füßen ein rotierendes System ist, wirken aus seiner Sicht auf das im linken und rechten Schenkel mit der Geschwindigkeit v_W fließende Wasser der Masse m einander entgegen gerichtete Corioliskräfte mit den Beträgen $F_C = 2 \cdot m \cdot v_W \cdot \omega$. Diese beiden Kräfte bewirken das Drehmoment $M = 2 \cdot F_C \cdot (b/2) = 2 \cdot m \cdot v_W \cdot \omega \cdot b$ auf die Wippe. b ist die Breite des U-Rohrs und $b/2$ der Hebelarm der auf einen Schenkel wirkenden Corioliskraft. Das Wasser bewege sich um r in der Zeit t mit der Geschwindigkeit $v_W = r/t$. m/t beschreibt den

Massedurchfluss, die Masse die in einer Zeiteinheit aus dem Rohr fließt.

$$M = 2 \cdot m \cdot (r / t) \cdot \omega \cdot b = 2 \cdot (m / t) \cdot r \cdot \omega \cdot b$$

$$m / t = M / (2 \cdot r \cdot \omega \cdot b)$$

Während des oben beschriebenen Experiments wurde das in der Abb.13.10 sichtbare M-t-Diagramme aufgenommen.

Die Amplitude des Diagramms zeigt das maximale Moment $M_{\max}$ zu $\omega_{\max} = v_s / r$ an.

$$m/t = M_{\max} / (2 \cdot r \cdot (v_s / r) \cdot b) = M_{\max} / (2 \cdot v_s \cdot b)$$

Anhand der ablesbaren Daten erhält man für m/t den Wert 0,18 kg/s.

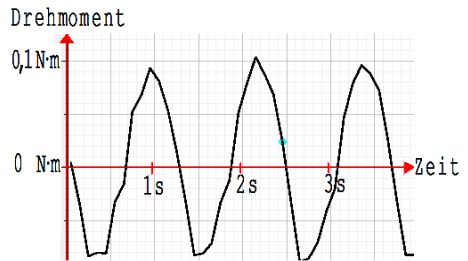


Abb.13.10

Das Messergebnis kann man überprüfen, indem man das austretende Wasser kurzzeitig mit einem Eimer auffängt. Auch anhand der Reichweite des aus dem Rohr austretenden Wasserstrahls ist m/t bestimmbar (siehe Abb.13.9). Somit ist die Prüfung der gewonnenen Ergebnisse leicht möglich. Bei dem hier beschriebenen Experiment wurde anhand der erwähnten Reichweite 0,17 kg/s ermittelt.

Anmerkung: Der an das U-Rohr angeschlossene Wasserschlauch ist über die Mitte der Wippe an das U-Rohr herangeführt. Damit soll vermieden werden, dass geringe Verschiebungen des Schlauchs während des Experiments zu störenden Drehmomenten führen.

13.3.2 Der Kreiselkompass

Ein interessantes Experiment zur Corioliskraft ist in der Abb.13.11 dargestellt. Zu sehen ist ein Rohr, welches beiderseits Elektromotoren trägt, die 450g schwere Eisenzyylinder gleichsinnig drehen. Es wird von einer durch seine Mitte geführte waagrechte Achse gehalten, deren eines Ende drehbar in einer hölzernen Drehscheibe steckt. Während einer Drehung dieser Scheibe richtet sich das Rohr parallel zur Rotationsachse der Drehscheibe aus (siehe Abb.13.12).

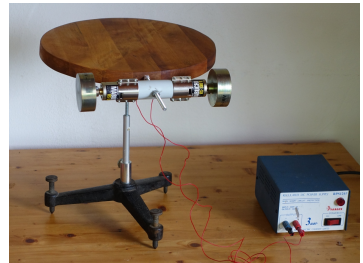


Abb.13.11

Aus der Sicht eines auf der Holzscheibe stehenden Beobachters B bewirken Corioliskräfte diese Ausrichtung. Zur Erklärung stellen wir uns einen Eisenzyylinder in viele kleine Teile $P_1, P_2, P_3 \dots$ der Masse m' aufgeteilt vor (siehe Abb.13.13). Die orthogonalen Projektionen von $P_1, P_2, P_3 \dots$ auf eine Ebene E durch die Mitte der Drehscheibe bewegen sich aus der Sicht von B mit den Geschwindigkeiten $u_1, u_2, u_3 \dots$. Diesen Geschwindigkeiten sind parallel zum Rohr ausgerichtete Corioliskräfte $F_1 = 2 \cdot m' \cdot \omega' \cdot u_1, F_2 = 2 \cdot m' \cdot \omega' \cdot u_2, F_3 = 2 \cdot m' \cdot \omega' \cdot u_3 \dots$ zuzuordnen.



Abb.13.12

ω' : Winkelgeschwindigkeit der Drehscheibe.

Die zugehörigen Drehmomente mit den Beträgen

$2 \cdot m' \cdot \omega' \cdot u_1 \cdot d_1$, $F_2 = 2 \cdot m' \cdot \omega' \cdot u_2 \cdot d_2$, $F_3 = 2 \cdot m' \cdot \omega' \cdot u_3 \cdot d_3 \dots$
 drehen das Rohr um seine Mitte aus der Ebene E.
 $d_1, d_2, d_3 \dots$ sind die Abstände der Teile $P_1, P_2, P_3 \dots$ von E.
 Es sind die Hebelarme der Kräfte $F_1, F_2, F_3, \dots$

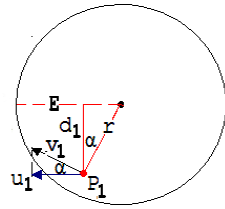


Abb.13.13

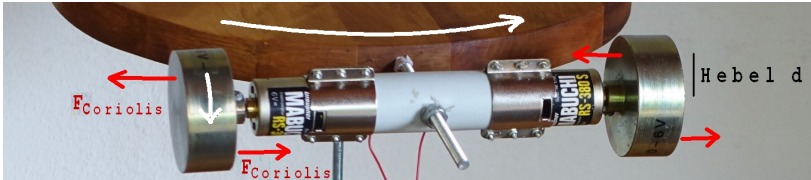


Abb.13.14

Zur Berechnung des auf einen Zylinder insgesamt wirkenden Drehmoments wählen wir zunächst zwei Massepunkte P und P' (siehe Abb.13.15), deren Radien übereinstimmen und einen rechten Winkel miteinander bilden. Das Drehmoment dieses Punktepaars rechnen wir aus. Hiernach kann leicht auf das Gesamtmoment M_g aller Massepunkte P geschlossen werden. Für die Corioliskraft F' auf P' gilt :

$$F' = 2 \cdot m' \cdot \omega' \cdot u', \quad u' = v \cdot \sin \alpha, \quad v = \omega \cdot r$$

v : Umlaufgeschwindigkeit von P in Bezug auf die Achse A,
 ω : Winkelgeschwindigkeit des Eisenzylinders in Bezug auf die Motorachse.

$$F' = 2 \cdot m' \cdot \omega' \cdot \omega \cdot r \cdot \sin \alpha$$

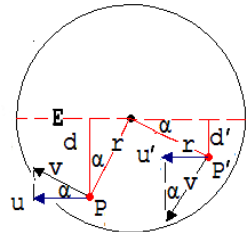


Abb.13.15

Das zugehörige Drehmoment ist $M' = F' \cdot d' = 2 \cdot m' \cdot \omega' \cdot \omega \cdot r \cdot \sin \alpha \cdot d'$, $d' = r \cdot \sin \alpha$,
 $M' = 2 \cdot m' \cdot \omega' \cdot \omega \cdot r^2 \cdot \sin^2 \alpha$.

$$\text{Für P gilt: } M = 2 \cdot m \cdot \omega' \cdot \omega \cdot r^2 \cdot \cos^2 \alpha.$$

$$M' + M = 2 \cdot m' \cdot \omega' \cdot \omega \cdot r^2 \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2 \cdot m' \cdot \omega' \cdot \omega \cdot r^2$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad 2 \cdot m' = m \text{ ist die Gesamtmasse beider Punkte.}$$

$$M' + M = m \cdot \omega' \cdot \omega \cdot r^2$$

Das Gesamtdrehmoment aller Paare P|P' eines Zylinders ist $M_Z = \omega' \cdot \omega \cdot \Sigma m \cdot r^2$.

$$\Sigma m \cdot r^2 \text{ ist als Trägheitsmoment } J \text{ des Zylinders bekannt. } \rightarrow M_Z = \omega' \cdot \omega \cdot J$$

Das Drehmoment M_g beider Zylinder ist demnach: $M_g = \omega' \cdot \omega \cdot J_g$, $J_g = 2 \cdot J$.

So wie sich das Rohr zur Achse der Holzscheibe verhält, so würde es sich auch zur Erdachse verhalten, wenn es sich um eine senkrechte Achse ungehemmt und reibungsfrei drehen könnte. Am Äquator würde es sich parallel zu Erdachse einstellen und abseits des Äquators in die örtliche Meridianebene drehen. Man hätte mit ihm einen Kreiselkompass.

13.3.3 Berechnung einer Bewegung in einem rotierenden System unter Berücksichtigung der Zentrifugal- und Corioliskraft

Die Bewegung in einem rotierenden System wird nur dann richtig berechnet, wenn man neben den wirklichen Kräfte auch noch die Zentrifugal- und die Corioliskraft in die Rechnung eingehen lässt.

Beispiel: Wir stellen uns einen kleinen Gegenstand G vor, der sich auf einer ebenen Fläche E von einem Punkt P dieser Fläche geradlinig nach $s = v \cdot t$ ($v = 2 \text{ m/s}$) entfernt. Durch P gehe eine zu E rechtwinklig ausgerichtete Achse A, um die oberhalb von E eine Scheibe mit $\omega = 0,5 \text{ s}^{-1}$ links herum rotiert. Auf dieser Scheibe sei ein Koordinatensystem, dessen Nullpunkt auf der Achse A liegt. Zum Zeitpunkt $t=0$ zeige die Projektion der zugehörigen x-Achse auf die Ebene E in die Bewegungsrichtung von G. Von der Scheibe aus gesehen dreht sich die Verbindungsstrecke von G zu P mit der Winkelgeschwindigkeit ω nach rechts und bildet zum Zeitpunkt t den Winkel $-\omega \cdot t$ mit der Projektion der genannten x-Achse (siehe Abb. 13.16). In der Abb.13.17 ist die mit dem Programm $n=20; t=t+0,1; y=2*t*\sin(-0,5*t); x=2*t*\cos(-0,5*t); l=t$ errechnete Bahn, von der rotierenden Scheibe aus gesehen, dargestellt.

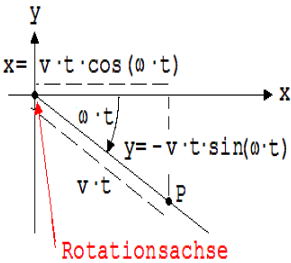


Abb.13.16

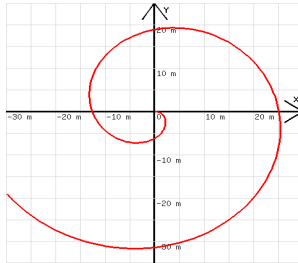


Abb.13.17

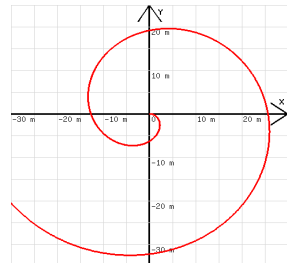


Abb.13.18

Für einen Beobachter auf der rotierenden Scheibe entsteht diese Bahn unter der Wirkung der Zentrifugalkraft $Z = \{Z_1; Z_2\}$ und Corioliskraft $C = \{C_1; C_2\}$. Deren Koordinaten wie folgt bestimmt werden.

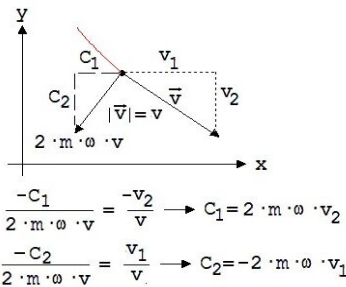


Abb.13.19

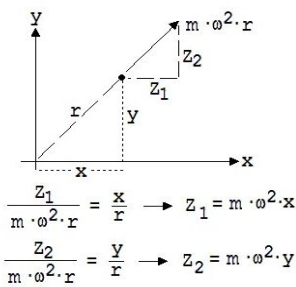


Abb.13.20

Mit diesen Kräften erhält man mit hoehne.de/Sim.html (Rechtsklick, in neuem Fenster öffnen) für die Bewegung von P mit der Anfangsgeschwindigkeit $q = 2 \text{ m/s}$ in x-Richtung erhält man nach dem Programm $n=20; a=2*0,5*q+0,25*x; b=-2*0,5*p+0,25*y; x=0,5*a*h^2+p*h+x; y=0,5*b*h^2+q*h+y; p=a*h+p; q=b*h+q; h=0,01; t=t+h; l=t$ die in der Abb.13.18 sichtbare Bahn. Diese stimmt mit der Bahn in der Abb. 13.17 überein. $q = 2 \text{ m/s}$ muss als Anfangsgeschwindigkeit in das Variablenfeld eingetragen werden.

13.3.4 Erscheinungen auf der Erde, die als Zeichen der Corioliskraft gedeutet werden können

Es sind einige Erscheinungen auf der Erde zu nennen, die als Zeichen der Corioliskraft gedeutet werden können. So ist bekannt, dass bei den Flüssen Sibiriens das rechte Ufer steiler ist als das linke. Hierfür ist die Corioliskraft verantwortlich, welche den Wasserstrom nach rechts drückt. Die Erde dreht sich nach Osten, dies bedeutet, dass ein über dem Nordpol schwebender Beobachter die Erde in einer Linksdrehung sieht.

Die Auswirkung der Corioliskraft sind bei genauer Betrachtung auch an mitteleuropäischen Flüssen wahrnehmbar. So sind zum Beispiel die flachen Uferzonen an der Donau östlich von Passau zwischen Obernzell und Schlögen auf der linken Seite des Flusses insgesamt länger und breiter als auf der rechten Seite (siehe Abb. 13.21). Auch Passatwinde sind Zeichen von Corioliskräften. Am Äquator aufsteigende Luftmassen werden nach Westen gelenkt.

Ebenfalls bekannt ist die Tatsache, dass abfließendes Badewasser das Abflussloch der Badewanne auf der Nordhalbkugel meistens mit einer Rechtsdrehung verlässt.



Abb.13.21

13.3.5 Das Foucaultpendel

Ein Fadenpendel schwingt über dem Nordpol. Aus der Sicht eines über dem Nordpol schwebenden Beobachters dreht sich die Erde links herum. Die Schwingungsebene des Pendels dreht sich dabei nicht mit. Für einen Beobachter auf der Erde dreht sich deshalb die Schwingungsebene des Pendels in 24 Stunden um 360° rechts herum. Er führt dies auf die am Pendelkörper angreifende Corioliskraft $\mathbf{F}_C = 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \{\mathbf{v}_y, -\mathbf{v}_x\}$ mit $\omega = 2 \cdot \pi / 24\text{h}$ zurück. Im Folgenden wird bewiesen, dass sich ein Pendel an einem Ort mit einem Breitengrad $\alpha < 90^\circ$ unter einer Corioliskraft $\mathbf{F}_C = 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \sin(\alpha) \cdot \{\mathbf{v}_y, -\mathbf{v}_x\}$ dreht. Ein Pendel an einem Ort mit $\alpha = 50^\circ$ Breite verhält sich demnach so wie ein Pendel auf dem Pol eines Planeten der sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \cdot \sin(\alpha)$ dreht. Seine Pendelebene dreht sich deshalb nicht wie auf dem Pol der Erde um 360° , sondern um $360^\circ \cdot \sin(50^\circ) = 275^\circ$.

Beweis:

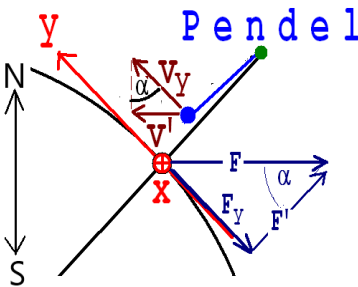


Abb.13.22

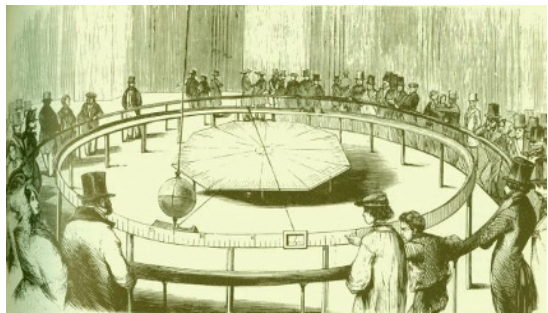


Abb.13.23: 1850 zeigt der französische Physiker Jean-Bernard-Léon Foucault durch einen Pendelversuch in der

Pariser Sternwarte, dass sich die Erde dreht.

Ein Pendel schwinde an einem Ort mit dem Breitengrad α . Ihm sei ein Koordinatensystem zugeordnet, dessen y-Achse zum Nordpol und dessen x-Achse von Osten nach Westen weist. In der hier sichtbaren Abbildung (siehe Abb.13.22) zeigt die x-Achse in Blickrichtung. Für die x-Komponente der Corioliskraft ist die Geschwindigkeit v' maßgebend. Es ist die Komponente von v_y parallel zur Äquatorebene.

$$v' = v_y \cdot \sin \alpha$$

Dementsprechend gilt für die x-Koordinate F_x der Corioliskraft:

$$F_x = 2 \cdot m \cdot v' \cdot \omega = 2 \cdot m \cdot v_y \cdot \omega \cdot \sin(\alpha)$$

Die Geschwindigkeit v_x (siehe Abb.13.22) in x-Richtung ist für die y-Komponente F_y der Corioliskraft maßgebend. Im Fall $v_x > 0$ zeigt der Vektor $\mathbf{F}$ der Corioliskraft mit dem Betrag $F = |2 \cdot m \cdot v_x \cdot \omega|$ von der Erdachse weg. Diese Kraft $\mathbf{F}$ kann als Summe zweier Kräfte $\mathbf{F}'$ und $\mathbf{F}_y$ aufgefasst werden (siehe Abb.13.22) Für die Drehung der Schwingungsebene ist $\mathbf{F}'$ ohne Bedeutung. Nur $\mathbf{F}_y$ ist wichtig.

$$F_y = -F \cdot \sin(\alpha) = -2 \cdot m \cdot v_x \cdot \sin(\alpha) \cdot \omega$$

$\{2 \cdot m \cdot v_y \cdot \omega \cdot \sin(\alpha); -2 \cdot m \cdot v_x \cdot \omega \cdot \sin(\alpha)\} = 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \sin(\alpha) \cdot \{v_y; -v_x\}$ ist die für die Drehung des Pendels maßgebende Corioliskraft.

14. Mechanik rotierender Körper

14.1 Drehimpuls und Drehimpulssatz

An dem oberen Ende eines auf der Experimentierwippe aufgesteckten Stativstabs ist ein waagrechtes Stäbchen A befestigt. An ihm pendeln zwei, von sehr leichten Stäben gehaltene Kugeln K_1 und K_2 . Stößt K_1 auf K_2 (siehe Abb.14.1), dann ändert sich die Summe aus den Impulsen der beiden Kugeln während des Stoßes nicht. Der Stativstab erfährt während dieses Ereignisses keine Kraft. Die Kraft von K_1 wird völlig auf K_2 übertragen.

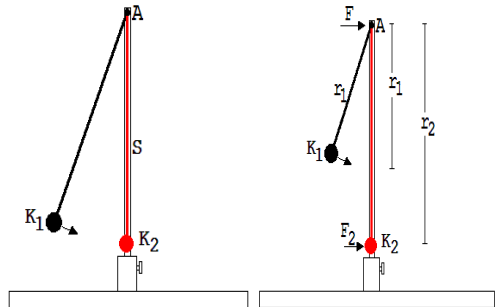


Abb.14.1

Abb.14.2

Schlägt K_1 nicht auf K_2 , sondern stattdessen auf den Pendelstab S mit der Kraft F_1 (siehe Abb.14.2), dann wirkt K_1 nicht nur auf K_2 , sondern auch auf A. Demzufolge ist die Kraft F_2 auf K_2 kleiner als F_1 . Dies kann mit dem Hebelgesetz leicht begründet werden, denn danach gilt: Wirkt auf einen Hebel im Abstand r_1 vom Drehpunkt eine Kraft F_1 , dann übt der Hebel auf einen Körper im Abstand r_2 vom Drehpunkt nach $(F_2 \cdot r_2 = F_1 \cdot r_1)$ die Kraft $F_2 = (r_1 / r_2) \cdot F_1$ aus. Die Differenz $F_1 - F_2$ wird von A aufgenommen.

Anmerkung: Es wird vorausgesetzt, dass die Masse des Hebels vernachlässigbar klein ist.

Was für die Kraft gilt, trifft auch für die Impulsänderungen während des Stoßes zu. $-F_1$ (Gegenkraft zu F_1) ändert den Impuls von K_1 nach $-F_1 = \Delta(m_1 \cdot v_1) / \Delta t$ und F_2 den von K_2

nach $F_2 = \Delta(m_2 \cdot v_2) / \Delta t$.

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2 \rightarrow (-\Delta(m_1 \cdot v_1) / \Delta t) \cdot r_1 = (\Delta(m_2 \cdot v_2) / \Delta t) \cdot r_2$$

$$-\Delta(m_1 \cdot v_1) \cdot r_1 = \Delta(m_2 \cdot v_2) \cdot r_2 \rightarrow \Delta(m_2 \cdot v_2) \cdot r_2 + \Delta(m_1 \cdot v_1) \cdot r_1 = 0$$

F_1 , F_2 , $m_1 \cdot v_1$ und $m_2 \cdot v_2$ beschreiben die quer zum Stab gerichteten Kraft- und Impulskomponenten. Wir vereinbaren, dass diese Größen ein positives Vorzeichen haben sollen, wenn sie zu einer Linksdrehung gehören oder im Sinne einer Linksdrehung wirken. Andernfalls sollen sie negativ sein. Das zu einem Massepunkt gehörende Produkt $m \cdot v \cdot r$ nennen wir Drehimpuls L (v = Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu r).

Wir vermuten: Die Summe der Drehimpulse L aller Teile eines abgeschlossenen Systems ist konstant (Drehimpulssatz).

Für diese Vermutung, die im Folgenden noch bewiesen wird, spricht auch das Ergebnis des folgenden Gedankenexperiments: Auf einer Ebene rolle eine Kugel K . Hierbei dreht sich die Verbindungsstrecke zu einem Punkt D (Drehpunkt) um D (siehe Abb.14.3). r_2 ist die variable Länge dieser Verbindungsstrecke.

Die Kugel bewegt sich nach dem Trägheitssatz gleichförmig mit konstantem Impuls $m \cdot v$. In Bezug auf den Drehpunkt D können wir ihr auch einen Drehimpuls zuordnen.

$$m \cdot v / m \cdot v_q = r_2 / r_1 \text{ (ähnliche Dreiecke !)}$$

$$\downarrow$$

$$r_1 \cdot m \cdot v = r_2 \cdot m \cdot v_q$$

$r \cdot m \cdot v_q$ ändert sich nicht, denn $m \cdot v$ und r_1 sind konstante Anfangswerte.

Hier ist von einem Drehimpuls eines fast völlig freien Teilchens die Rede. Dieses Beispiel gibt Anlass zur Definition eines Drehimpulses für jedes beliebige Teilchen P . Wir denken uns ein Teilchen P mit dem Impuls $\mathbf{p}$ und einem Ortsvektor $\mathbf{r}$, der von einem beliebig gewählten Punkt D ausgeht (siehe Abb.14.4).

Unter dem Drehimpuls L des Teilchens P in Bezug auf den Punkt D verstehen wird das Produkt mit dem Betrag $|\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{p}_q|$. $\mathbf{p}_q$ ist die Komponente von $\mathbf{p}$ senkrecht zu $\mathbf{r}$ in der von $\mathbf{r}$ und $\mathbf{p}$ aufgespannten Ebene. L erhält im Fall einer Linksdrehung ein positives und andernfalls ein negatives Vorzeichen.

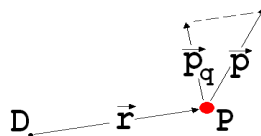
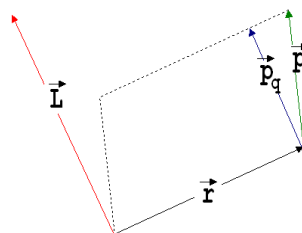


Abb.14.4

Drehimpulsvektor

L erscheint zur Beschreibung des Drehimpulses nicht ausreichend. Es wird eine Angabe über die Lage der Drehachse vermisst, um die sich der Vektor $\mathbf{r}$ dreht. Diese Achse steht senkrecht zu der durch $\mathbf{r}$ und $\mathbf{p}$ aufgespannten Ebene. Zur Beschreibung von L und der Achsenlage definieren wir einen Drehimpulsvektor $\mathbf{L}$ mit folgenden Eigenschaften (siehe Abb.14.5). $|\mathbf{L}| = L$. $\mathbf{L}$ steht senkrecht auf der durch $\mathbf{r}$ und $\mathbf{p}$ aufgespannten Ebene. Bei einer Linksdrehung ist $\mathbf{L}$ auf den



Betrachter gerichtet.

Abb.14.5

Eine Methode zur Bestimmung von $\mathbf{L}$ kann sofort angegeben werden. $\mathbf{L}$ gleicht dem Kreuzprodukt $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ (siehe Kapitel 11.4).

Von nun an verstehen wir unter dem Drehimpuls nur noch den hier angegebenen Vektor $\mathbf{L}$.

Für die so definierten Drehimpulse $\mathbf{L}$ gilt der auf letzten Seite angegebene Drehimpulssatz.

Beweis: Wir denken uns ein abgeschlossenes System mit Teilchen der Impulse $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \dots$ und den Ortsvektoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \dots$ in Bezug auf einen Drehpunkt D.

Zum Beweis der Behauptung: „ $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{p}_3 + \mathbf{r}_4 \times \mathbf{p}_4 + \dots = \text{konstanter Vektor } \mathbf{L}_g$ “ muss nachgewiesen werden, dass $d\mathbf{L}_g/dt$ gleich 0 ist.

$$\begin{aligned} d\mathbf{L}_g/dt &= d(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{p}_3 + \mathbf{r}_4 \times \mathbf{p}_4 + \dots) / dt \\ d\mathbf{L}_g/dt &= (d\mathbf{r}_1/dt \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{p}_1/dt) + (d\mathbf{r}_2/dt \times \mathbf{p}_2 + \mathbf{r}_2 \times d\mathbf{p}_2/dt) + (d\mathbf{r}_3/dt \times \mathbf{p}_3 + \\ &\quad + \mathbf{r}_3 \times d\mathbf{p}_3/dt) + (d\mathbf{r}_4/dt \times \mathbf{p}_4 + \mathbf{r}_4 \times d\mathbf{p}_4/dt) + \dots (\text{Produktregel}) \\ d\mathbf{L}_g/dt &= (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{p}_1/dt) + (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{p}_2 + \mathbf{r}_2 \times d\mathbf{p}_2/dt) + (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{p}_3 + \mathbf{r}_3 \times d\mathbf{p}_3/dt) + \\ &\quad + (\mathbf{v}_4 \times \mathbf{p}_4 + \mathbf{r}_4 \times d\mathbf{p}_4/dt) + \dots \end{aligned}$$

Die Kreuzprodukte $\mathbf{v} \times \mathbf{p}$ sind Nullvektoren, weil $\mathbf{v}$ und $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$ gleiche Richtungen haben.

$$d\mathbf{L}_g/dt = (\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{p}_1/dt) + (\mathbf{r}_2 \times d\mathbf{p}_2/dt) + (\mathbf{r}_3 \times d\mathbf{p}_3/dt) + (\mathbf{r}_4 \times d\mathbf{p}_4/dt) + \dots$$

$d\mathbf{p}_1/dt, d\mathbf{p}_2/dt, d\mathbf{p}_3/dt \dots$ sind die auf die Teilchen 1, 2, 3, 4.. wirkenden Kräfte $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3 \dots$

$$d\mathbf{L}_g/dt = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) + (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3) + (\mathbf{r}_4 \times \mathbf{F}_4) + \dots$$

$d\mathbf{L}_g/dt = 0$, denn zu jeder Kraft $\mathbf{F}_{ij}$ eines Teilchens i auf ein Teilchen j gehört eine Gegenkraft $\mathbf{F}_{ji}$ eines Teilchens j auf ein Teilchen i . Wegen $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ kann $d\mathbf{L}_g/dt$ als Summe der Paare $\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{F}_{ij}$ (Distributivgesetz für das Kreuzprodukt!) dargestellt werden. $(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$ ist parallel zur Verbindungsstrecke zwischen den Teilchen i und j . Wird den allgemeinen Erfahrungen entsprechend vorausgesetzt, dass die Kraft $\mathbf{F}_{ij}$ parallel zur genannten Verbindungsstrecke ist, dann gilt für alle Paare $\mathbf{F}_{ij}, \mathbf{F}_{ji}$: $(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$.

14.2 Das Drehmoment

Nach der Entdeckung des Impulssatzes wurde $d(m \cdot \mathbf{v})/dt$ als Maß für eine Einwirkung von außen definiert. Nun kommt $d\mathbf{L}/dt$ auch als ein solches Maß in Frage. Wir betrachten zunächst ein einziges Teilchen unter einer äußeren Einwirkung.

Für $d\mathbf{L}/dt$ gilt nach den Ausführungen des letzten Kapitels: $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$ heißt Drehmomentvektor

$\mathbf{r}$ ist der Verbindungsvektor vom Drehpunkt D zum Angriffspunkt der Kraft $\mathbf{F}$. Wenn $\mathbf{F}$ eine Drehung verursacht, dann zeigt $\mathbf{M}$ die Richtung der Drehachse an (siehe Abb.14.6).

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}| \cdot \text{Hebelarm } H$$

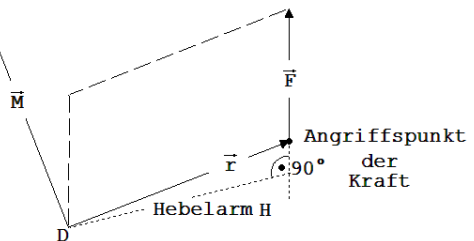


Abb.14.6

Der Hebelarm H ist der Abstand des Drehpunkts vom Kraftpfeil oder dessen Verlängerung. $|\mathbf{F}| \cdot H = |\mathbf{M}|$ steht für den Flächeninhalt des von $\mathbf{r}$ und $\mathbf{F}$ aufgespannten Parallelogramms.

Liegt ein System S aus vielen Massepunkten 1, 2, 3... vor, z.B. eine rotierende Scheibe, dann nennt man die Summe der zu den Massepunkten gehörenden Drehimpulse den Gesamtdrehimpuls $\mathbf{L}$ des Systems.

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \dots$$

Behauptung: Die Summe der Drehmomente $\mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a + \mathbf{r}_b \times \mathbf{F}_b + \mathbf{r}_c \times \mathbf{F}_c \dots$ der auf das System wirkenden Kräfte $\mathbf{F}_a$, $\mathbf{F}_b$, und $\mathbf{F}_c$ ist gleich $d\mathbf{L}/dt$ (siehe Abb.14.7).

Beweis:

Ein abgeschlossenes System bestehe aus den Teilen K_1 bis K_{20} mit dem Gesamtdrehimpuls $\mathbf{L}$ und drei weiteren voneinander unabhängigen Teilen K_a , K_b und K_c , die mit den Kräften $\mathbf{F}_a$, $\mathbf{F}_b$ und $\mathbf{F}_c$ auf K_1 bis K_{20} einwirken. Auf K_a , K_b und K_c wirken die Kräfte $-\mathbf{F}_a$, $-\mathbf{F}_b$, $-\mathbf{F}_c$. Das gesamte System hat den konstanten Drehimpuls $\mathbf{L}_g$.

$$d\mathbf{L}_g/dt = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 + \dots) +$$

$$\mathbf{r}_a \times (-\mathbf{F}_a) + \mathbf{r}_b \times (-\mathbf{F}_b) + \mathbf{r}_c \times (-\mathbf{F}_c) = 0$$

$$d\mathbf{L}_g/dt = d\mathbf{L}/dt + \mathbf{r}_a \times (-\mathbf{F}_a) + \mathbf{r}_b \times (-\mathbf{F}_b) + \mathbf{r}_c \times (-\mathbf{F}_c) = 0$$



$$d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a + \mathbf{r}_b \times \mathbf{F}_b + \mathbf{r}_c \times \mathbf{F}_c = \mathbf{M} \text{ (Gesamtdrehmoment von } K_a, K_b \text{ und } K_c)$$

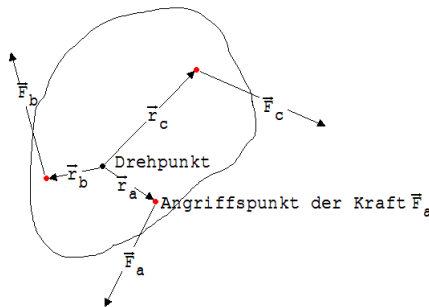


Abb.14.7

14.3 Winkelbeschleunigung und Drehmoment

Aufgabe:

Ein $m = 500 \text{ g}$ schwerer Zylinder ($R = 4 \text{ cm}$) kann sich reibungsfrei um eine waagrechte Achse drehen (siehe Abb.14.8). Um diesen Zylinder ist ein 2 m langer Faden gewunden, der mit der Kraft $F = 1 \text{ N}$ vom Zylinder abgezogen wird.

Wir ändert sich die Winkelgeschwindigkeit unter der Einwirkung der Kraft F ?

Nach welcher Zeit ist der 2 m lange Faden abgespult?

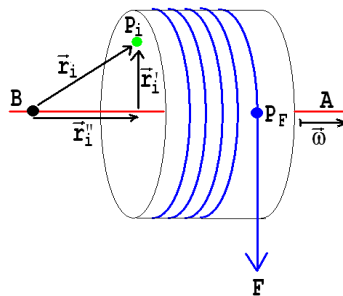


Abb.14.8

Der Drehimpuls $\mathbf{L}$ des Zylinders ändert sich unter dem Drehmoment der Kraft $\mathbf{F}$. Zur Beantwortung der gestellten Fragen muss deshalb $\mathbf{L}$ als Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω dargestellt werden. Hier ist ω fett gedruckt, womit darauf hingewiesen wird, dass ein Vektor gemeint ist.

Unter dem Vektor ω der Winkelgeschwindigkeit verstehen wir einen Vektor parallel zur Drehachse mit dem Betrag ω . Die Richtung von ω ist so festgelegt, dass ein Beobachter eine Linksdrehung wahrnimmt, wenn ω auf ihn zeigt.

Zunächst soll der Drehimpuls $\mathbf{L}_i$ eines einzigen Massepunkt P_i des Zylinders mit der Masse m und der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_i$ in Bezug auf einen Achsenpunkt B bestimmt werden.

$$\text{Für } \mathbf{L}_i \text{ gilt: } \mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \cdot \mathbf{v}_i = (\mathbf{r}_i'' + \mathbf{r}_i') \times m_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i'' \times m_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i' \times m_i \cdot \mathbf{v}_i$$

$\mathbf{r}_i$ ist der von dem Punkt B ausgehende Ortsvektor zu P_i . Der ebenfalls auf P_i weisende Vektor $\mathbf{r}_i'$ geht vom Mittelpunkt der zu P_i gehörenden Kreisbahn aus, $\mathbf{r}_i''$ zeigt von B auf den Fußpunkt von $\mathbf{r}_i'$. $\mathbf{r}_i'' \times m_i \cdot \mathbf{v}_i$ bildet mit der Drehachse einen rechten Winkel.

$\mathbf{r}_i' \times m_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{L}_{Ai}$ ist die in Achsenrichtung zeigende Komponente des Drehimpulses $\mathbf{L}_i$.

$$|\mathbf{L}_{Ai}| = |\mathbf{r}_i'| \cdot m_i \cdot |\mathbf{v}_i|, \quad |\mathbf{v}_i| = \omega \cdot |\mathbf{r}_i'| \rightarrow |\mathbf{L}_{Ai}| = \omega \cdot m_i \cdot r_i'^2 \rightarrow \mathbf{L}_{Ai} = \omega \cdot m_i \cdot r_i'^2$$

Der Drehimpuls $\mathbf{L}$ des Zylinders ist gleich der Summe aller $\mathbf{L}_{Ai}$, denn die zur Achse senkrecht stehenden Komponenten der verschiedenen $\mathbf{L}_i$ heben sich aus Symmetriegründen gegenseitig auf.

$$\mathbf{L} = \omega \cdot (m_1 \cdot r_1'^2 + m_2 \cdot r_2'^2 + m_3 \cdot r_3'^2 + \dots)$$

Die Summe $m_1 \cdot r_1'^2 + m_2 \cdot r_2'^2 + m_3 \cdot r_3'^2 + \dots$ ist als Trägheitsmoment J bekannt.

$$\mathbf{L} = \omega \cdot J, \quad J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2, \quad R = \text{Radius des Zylinders mit der Masse } m \rightarrow \mathbf{L} = \omega \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$$

Für die Änderung von $\mathbf{L}$ ist das Moment $\mathbf{M} = \mathbf{r}_F \times \mathbf{F}$ maßgebend. $\mathbf{r}_F$ zeigt vom Achsenpunkt B zum Angriffspunkt P_F der Kraft $\mathbf{F}$.

$$\mathbf{M} = (\mathbf{r}_A + \mathbf{R}_A) \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{R}_A \times \mathbf{F}$$

$\mathbf{r}_A$ und $\mathbf{R}_A$ verhalten zueinander wie $\mathbf{r}_i''$ zu $\mathbf{r}_i'$. $\mathbf{R}_A$ steht rechtwinklig auf der Achse A und zeigt auf P_F . $\mathbf{r}_A$ ist von B aus auf den Fußpunkt von $\mathbf{R}_A$ gerichtet.

Der rechtwinklig zur Achse stehende Vektor $\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}$ wird durch Drehmomente ausgeglichen, die von den Lagern der Drehachse ausgehen.

$$\text{Deshalb gilt: } \mathbf{R}_A \times \mathbf{F} = d\mathbf{L}/dt = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot d\omega/dt.$$

Die x-Achse des zugeordneten Koordinatensystems habe die Richtung von $\mathbf{L}$.

$$\mathbf{M} = \{M, 0, 0\}, \quad \mathbf{L} = \{L, 0, 0\} \text{ und } \omega = \{\omega, 0, 0\}.$$

$$M = R \cdot F = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot d\omega/dt, \quad \omega = v / R, \quad v: \text{Geschwindigkeit des Fadens}$$

$$d\omega/dt = (dv/dt) / R = a / R, \quad a: \text{Beschleunigung des Fadens}$$

$$R \cdot F = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot a / R \rightarrow a = 2 \cdot F / m$$

$$\text{Der Faden bewegt sich nach } s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

$$s = F \cdot t^2 / m \rightarrow t^2 = s \cdot m / F = 2 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} \text{ kg} / 1 \text{ N} = 1 \text{ s}^2 \rightarrow t = 1 \text{ s}$$

Die hier gestellte Aufgabe kann auch mit Hilfe des Energiesatzes gelöst werden. Die kinetische Energie des Zylinders $J \cdot \omega^2 / 2$ nach dem Abspulen des Fadens ist gleich der am Faden verrichteten Arbeit $s \cdot F$.

$$s \cdot F = J \cdot \omega^2 / 2, \quad \omega = v / R \rightarrow s \cdot F = J \cdot (v^2 / R^2) / 2$$

$$v = 2 \cdot (s / t), \quad (v \text{ ist doppelt so groß wie mittlere Geschwindigkeit } s / t !)$$

$$s \cdot F = J \cdot 4 \cdot [(s / t)^2 / R^2] / 2 \rightarrow t^2 = 2 \cdot J \cdot s / (R^2 \cdot F), \quad J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \rightarrow t^2 = s \cdot m / F$$

fällt auf, dass einer Drehbewegungen um eine Achse Gesetze zugeordnet sind, die denen der Punktmechanik (Schwerpunktmechanik) ähneln (siehe Tabelle).

$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{L} = J \cdot \boldsymbol{\omega}$
$\mathbf{F} = m \cdot d\mathbf{v} / dt$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{M} = J \cdot d\boldsymbol{\omega} / dt$
$E = m \cdot v^2 / 2$	$\leftrightarrow$	$E = J \cdot \omega^2 / 2$

$\mathbf{L} = J \cdot \boldsymbol{\omega}$ ist nicht allgemein gültig, denn $\mathbf{L}$ kann eine andere Richtung haben als $\boldsymbol{\omega}$. Haben $\mathbf{L}$ und $\boldsymbol{\omega}$ gleiche Richtungen, dann nennt man die Rotationsachse eine Hauptträgheitsachse. Es gibt zu jedem Körper mindestens drei derartige durch den Schwerpunkt laufende Hauptträgheitsachsen, die senkrecht zueinander stehen (siehe Abb.14.9).

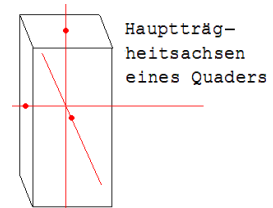


Abb.14.9

Drehmoment bei einer Richtungsänderung des Vektors $\mathbf{L}$

Mit einem Drehmoment nach $\mathbf{M} = d(J \cdot \boldsymbol{\omega})/dt$ ist auch dann zu rechnen, wenn $\boldsymbol{\omega}$ dem Betrage nach konstant bleibt, aber seine Richtung ändert. Dies ist z.B. bei dem auf der Seite 65 in der Abb.13.11 angedeuteten Experiment der Fall.

Das dabei verwendete Gerät, ein Modell eines Kreiselkompasses, erfährt in seiner waagrechten Lage während einer Drehung ein Drehmoment mit dem Betrag $\omega' \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot J_g$ (J_g : Trägheitsmoment der zwei rotierenden Zylinder). Anhand der Abb.14.10 ist dies leicht verstehen. Mit einem Drehmoment $\Delta \mathbf{L} / \Delta t$ kann ein Kreiselkompass bei einer Drehung der Holzscheibe um $\alpha = \omega' \cdot \Delta t$ während der Zeit Δt in waagrechter Lage gehalten werden. Der Kreiselkompass übt hierbei nach dem Wechselwirkungsgesetz ein Gegenmoment aus. Ohne Gegenwirkung würde er sich in dem hier skizzierten Fall vom Mittelpunkt der Scheibe aus betrachtet nach rechts drehen und sich dabei parallel zur Drehachse der Holzscheibe einstellen.

$\Delta \mathbf{L}$ dreht sich bei kleiner werdendem α zum Mittelpunkt der Holzscheibe. Sein Betrag (Länge) passt sich dabei immer besser der Länge des Bogens B an.

$$|\Delta \mathbf{L}| = \alpha \cdot |\mathbf{L}_1|, |\mathbf{L}_1| = \omega \cdot J \rightarrow |\mathbf{L}_1| = \omega' \cdot \Delta t \cdot \omega \cdot J_g$$

α : Winkel im Bogenmaß

ω : Winkelgeschwindigkeit des Kreiselkompasses

J_g : Trägheitsmoment beider rotierender Zylinder

Für das Drehmoment $\mathbf{M}_g$ gilt: $|\mathbf{M}_g| = |\Delta \mathbf{L}| / \Delta t = \omega' \cdot \omega \cdot J_g$

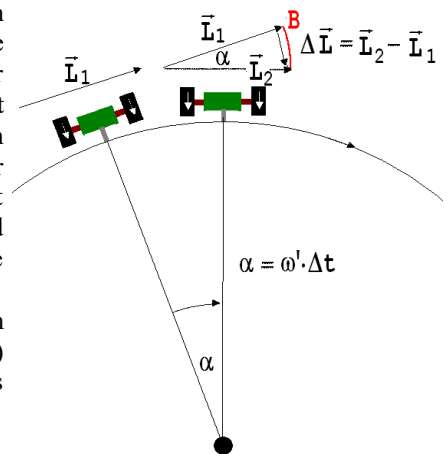


Abb.14.10

Messung des Drehmoments

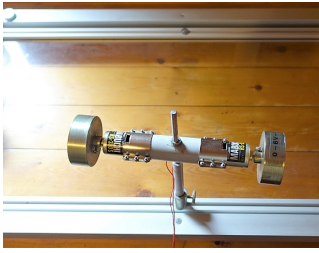


Abb.14.11

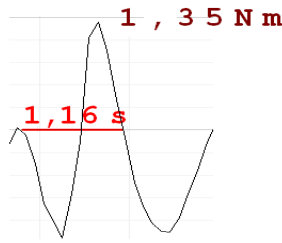


Abb.14.12

Der an eine 9V-Spannungsquelle angeschlossenen Kreisel kann sich mit seiner Mittelachse in dem Stativfuß auf der Mitte der Experimentierwippe (siehe Abb. 14.11) drehen. Wird er zu einer Drehung angestoßen, dann zeichnet der an die Wippe angeschlossenen Computer mit AD-Wandler (CASSY) das Diagramm in der Abb.14.12. Die Amplitude dieses Diagramms steht für das Drehmoment des Kreisels. Dieses wird dann voll auf die Wippe übertragen, wenn der Kreisel in die Längsrichtung der Wippe weist. Es beträgt $M = 1,35 \text{ Nm}$.

Am Diagramm ist als Umdrehungszeit des Kreisels der Wert $1,16 \text{ s}$ zu erkennen. Daraus folgt: $\omega' = 5,41 \text{ s}^{-1}$. Die beiden Zylinder haben den Radius $R = 3 \text{ cm}$ und zusammen die Masse 900 g . Folglich hat deren Trägheitsmoment $J_g = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$ den Wert $0,0037 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Mit einem Stroboskop wurde $f = 10,5 \text{ Hz}$ ($\omega = 66 \text{ s}^{-1}$) als Rotationsfrequenz der Zylinder gemessen. $M = \omega' \cdot \omega \cdot J = 5,41 \cdot 66 \cdot 0,0037 \text{ N} \cdot \text{m} = 1,32 \text{ N} \cdot \text{m}$

14.4 Drehschwingungen

Die Experimentierwippe schwingt nach einem Stoß mit abnehmender Amplitude.

Wovon ist die Frequenz abhängig, wie kann sie berechnet werden ?

Die Frequenz wird vermutlich vom Trägheitsmoment J der Wippe und der Steifheit der Rückstellfeder (Blattfeder an der Schmalseite der Wippe) bestimmt. **Diese Steifheit wird durch die sogenannte Winkelrichtgröße $k = |M| / \alpha$ beschrieben.** α (Bogenmaß) ist die Drehung unter dem Drehmoment M . Voraussetzung zur Definition von k ist: $|M| \sim \alpha$.

Zur Bestimmung von k wird auf das Ende der waagrechten Wippe (Länge $L = 0,7 \text{ m}$) ein 100 g - Gewicht gesetzt (siehe Abb.14.13), welches mit ca. 1 N auf das Ende einwirkt und dieses um eine kleine Strecke d nach unten drückt. Bei kleinem d ist $\alpha = d / (L/2)$, α ist der Drehwinkel im Bogenmaß. Das zugehörige Drehmoment M beträgt $1 \text{ N} \cdot L/2$.

$$k = 1 \text{ N} \cdot (L/2) / \alpha = 1 \text{ N} \cdot L^2 / (4 \cdot d)$$

An der Experimentierwippe mit $L = 0,7 \text{ m}$ wurde unter diesen Bedingungen $d = 0,4 \text{ mm}$ gemessen.

$$k_{\text{Wippe}} = 306 \text{ N} \cdot \text{m}$$

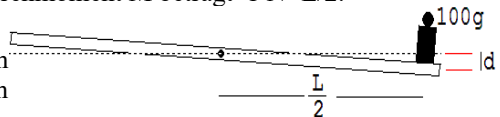


Abb.14.13

Eine Gleichung ist erwünscht, welche die Berechnung der Frequenz f bei Kenntnis von k und des Trägheitsmoments J ermöglicht.

Zur Berechnung der Frequenz f eines Fadenpendels und einer Flüssigkeitsschwingung in einem U-Rohr wurde von der für ein Federpendel hergeleiteten Gleichung ausgegangen.

$$f = [1/(2 \cdot \pi)] \cdot \sqrt{D / m}$$

Vermutlich erhält man eine zur Wippe passende Gleichung, wenn man die Masse m durch das Trägheitsmoment J und $D = F/s$ durch $M/\alpha = k$ ersetzt.

$$f = [1/(2 \cdot \pi)] \cdot \sqrt{k/J}$$

Dass dies richtig ist, sieht man sofort, wenn man die zum Federpendel- und zur Drehschwingung passenden Bewegungsgleichungen zum Vergleich hinschreibt.

Federpendel: $m \cdot dv/dt = -D \cdot x$, x = Auslenkung aus der Ruhelage

Drehschwingung der Wippe: $J \cdot d\omega/dt = -k \cdot \alpha$, α = Drehung aus der Ruhelage

Das Minuszeichen zeigt an, dass die zurücktreibende Kraft bzw. das zurücktreibende Drehmoment der Auslenkung entgegen gerichtet ist. Zur Ermittlung der Schwingungsfrequenz muss neben der Winkelrichtgröße k das Trägheitsmoment J einer rechteckigen Platte (Wippe) bestimmt werden.

Zur Berechnung von J wird eine Platte der Länge L und der Breite b mit der Flächendichte σ (Masse/Fläche) vorausgesetzt.

Zunächst wird $j = J/2$ der rechten Seite bestimmt.

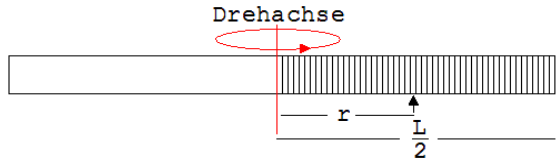


Abb.14.14

Wenn die Platte nach rechts um einen Streifen der Breite Δr verlängert wird, dann nimmt ihr Trägheitsmoment um $\Delta j = \Delta r \cdot b \cdot \sigma \cdot r^2$ zu. $\rightarrow dj/dr = b \cdot \sigma \cdot r^2 \rightarrow j = 1/3 \cdot b \cdot \sigma \cdot r^3$

$$j = 1/3 \cdot b \cdot \sigma \cdot (L/2)^3 = (1/24) \cdot b \cdot \sigma \cdot L^3 \rightarrow J = 2 \cdot j = (1/12) \cdot b \cdot \sigma \cdot L^3, \quad b \cdot \sigma \cdot L = m$$

$$\downarrow$$

$$J = (1/12) \cdot m \cdot L^2$$

$$m_{\text{Wippe}} = 1,8 \text{ kg}, \quad L_{\text{Wippe}} = 0,7 \text{ m}, \quad k_{\text{Wippe}} = 306 \text{ N} \cdot \text{m} \rightarrow J_{\text{Wippe}} = 0,0735 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\text{Schwingungsfrequenz } f = [1 / (2 \cdot \pi)] \cdot \sqrt{k/J} \text{ der Wippe } \approx 10 \text{ Hz}$$

14.5 Über das Schaukeln

Ganz alltägliche Erscheinungen werden selten hinterfragt. Ein typisches Beispiel hierfür ist die Schaukelbewegung eines Kindes.

Warum ist diese Bewegung möglich? Nicht eine Gewichtsverlagerung macht das Schaukeln möglich, wie so oft vermutet wird, sondern Drehimpulsänderungen des Körpers in Bezug auf den Körperschwerpunkt. Es genügt, wenn man den eigenen Körper um seinen eigenen Schwerpunkt hin und her dreht, wobei rechts von der Drehachse A die Arme gebeugt und links davon gestreckt werden. Die Beine müssen hierbei nicht ausgestreckt und wieder eingezogen werden. In der Abb.14.15 ist eine Schaukel zu sehen. Zwei Stangen St, die an einer Achse A pendeln, halten eine Person P, die sich auf ihrem Sitz um den eigenen Schwerpunkt dreht.

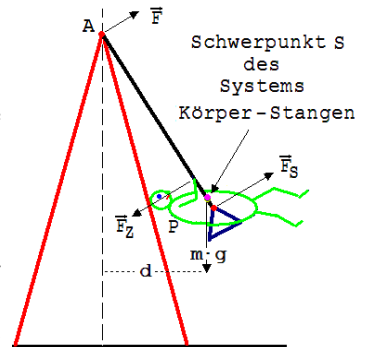


Abb.14.15

Wie ist es möglich, dass P sich selbst mit Hilfe der Stangen in Bewegungsrichtung beschleunigen kann ?

Die beschleunigende Kraft kann doch nicht aus dem System (Stangen-Körper) kommen, sie muss von außen wirken.

Wie kommt es zu einer nach vorne gerichteten Kraft, wenn P an den Stangen zieht ?

Die Kräfte der schaukelnde Person auf die Stangen St müssen sich gegenseitig aufheben, da sich andernfalls die Person von ihrem Sitz lösen müsste. Neben der Zugkraft F_Z der Arme wirkt noch eine zweite weniger auffällige Kraft F_S , die P über seinen Sitz auf die Stangen ausübt. Diese Kräfte sind dem Betrage nach gleich, nicht aber die zugehörigen Drehmomente. Wenn die schaukelnde Person an den Stangen zieht, dann übt sie in Bezug auf die Achse A mit der Kraft F_S ein größeres Drehmoment aus als mit der Kraft F_Z . Somit hat man ein Drehmoment im Sinne einer Linksdrehung.

Unter dem Kräftepaar (F_Z , F_S) werden die Stangen St mit einer Kraft F_A gegen die Drehachse A gedrückt. F , die Gegenkraft zu F_A , wirkt von außen; es ist die eigentliche Ursache für die Verstärkung der Schwingungsbewegung. Man kann sagen, P stößt sich während der Vorwärtsbewegung mittels der Stangen St von der Achse A ab.

Es wurde anfangs darauf hingewiesen, dass die Arme rechts von der Drehachse gebeugt und links von ihr gestreckt werden. Dass sie rechts von der Achse durchgehend gebeugt werden, auch dann, wenn die Linksdrehung in eine Rechtsdrehung übergeht, verwundert zunächst, denn es bleibt meistens unbemerkt, dass P beim Zurückschwingen seine Eigendrehung um den Körperschwerpunkt abbremst, auf die Stangen St drückt und auf diese Weise mit F_S ein die Rechtsdrehung begünstigendes Drehmoment ausübt.

Wie verhält es sich auf der linken Seite der Drehachse ?

Bei einer Bewegung nach links sind die Arme unter der Achse am stärksten gebeugt. P beginnt unter A mit der Streckung der Arme, drückt kräftig gegen die Stangen St und übt auf diese Weise mit F_S ein insgesamt nach rechts drehendes Moment aus. Hat er die größte Schwingungsweite erreicht, dann bremst er bei weiterer Streckung der Arme seine Drehung ab, womit die beginnende Linksdrehung unterstützt wird.

14.6 Der Kreisel

Ein Kreisel ist ein starrer Körper, der für eine Drehbewegung vorgesehen ist, bei der einer seiner Punkte an einem bestimmten Ort bleibt (siehe Abb.14.16). In der nebenstehenden Abbildung ist ein solcher Kreisel zu sehen.

Er wurde in einer Schräglage in eine schnelle Drehung versetzt. Das obere Ende seiner lose auf einem Träger sitzenden Rotationsachse bewegt sich auf einer Kreisbahn. **Präzession** der Kreiselachse heißt diese Bewegung („praecedere“ (lat.) = das Vorangehen). Zur Erklärung dieser Erscheinung dient die Abb.14.17.

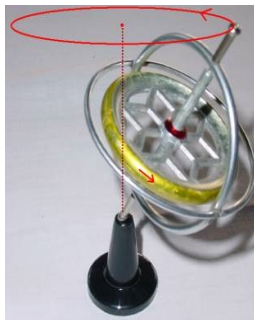


Abb.14.16

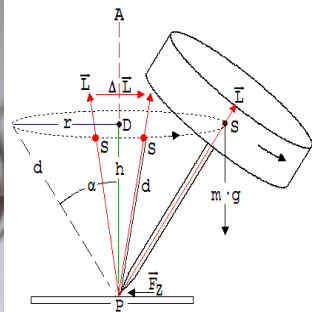


Abb.14.17

Ein zylindrischer Kreisel hat den Drehimpuls $\mathbf{L}$, der während eines kleinen Zeitabschnitts Δt um $\Delta \mathbf{L}$ geändert wird. $\Delta \mathbf{L} / \Delta t$ wird von dem nach unten wirkenden Drehmoment der Gewichtskraft mit dem Betrag $m \cdot g \cdot r$ verursacht. Als Bezugspunkt für Drehimpulse und Drehmomente ist der Drehpunkt P gewählt. Der Kreisel wirkt mit einem dem Betrage nach gleich großen Gegenmoment der Gewichtskraft entgegen und hält somit seinen Schwerpunkt auf der angedeuteten Kreisbahn (Radius r). Die Umlauffrequenz des Kreiselschwerpunkts heißt Präzessionsfrequenz f . ω' ist die zugehörige Kreisfrequenz. Mit Blick auf die Abb.14.17 findet man sehr schnell zu einer Gleichung für ω' . Die Geschwindigkeit $|\Delta \mathbf{L}| / \Delta t$, mit der sich die Vektorspitze von $\mathbf{L}$ bewegt ($\mathbf{L}$ liegt auf der Figurenachse), verhält sich zur Geschwindigkeit $\omega' \cdot r$ des Schwerpunkts S so wie $|\mathbf{L}|$ zu d (Strahlensatz).

$$|\Delta \mathbf{L}| / |\mathbf{L}| = (\omega' \cdot r) \cdot \Delta t / d \rightarrow |\Delta \mathbf{L}| / \Delta t = |\mathbf{L}| \cdot \omega' \cdot r / d, \quad |\Delta \mathbf{L}| / \Delta t \text{ ist gleich } m \cdot g \cdot r$$

Die bei P angreifende Zentripetalkraft $\mathbf{F}_Z$ ist ohne Bedeutung, denn $\mathbf{F}_Z$ hat kein Drehmoment in Bezug auf P.

$$m \cdot g \cdot r = |\mathbf{L}| \cdot \omega' \cdot r / d \rightarrow m \cdot g \cdot d = |\mathbf{L}| \cdot \omega', \quad |\mathbf{L}| = J \cdot \omega$$

ω ist die Winkelgeschwindigkeit des Zylinders um die präzedierende Achse.

$$\omega' = m \cdot g \cdot d / (\omega \cdot J) \rightarrow f = \omega' / (2 \cdot \pi) = m \cdot g \cdot d / (\omega \cdot J \cdot 2 \cdot \pi)$$

f nimmt mit abnehmendem ω zu.

Wichtige Anmerkung: Das hier gewonnene Ergebnis ist nur annähernd richtig. Es beschreibt den Sachverhalt nur dann zufriedenstellend, wenn ω' sehr klein gegenüber ω ist, denn mit der Drehung der Figurenachse hat man einen zusätzlichen Drehimpuls $\mathbf{L}'$, der dem Schwerpunkt des Rotationskörpers zuzuordnen ist (siehe Abb.14.18). Die waagrechte Komponente

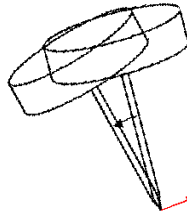


Abb.14.18

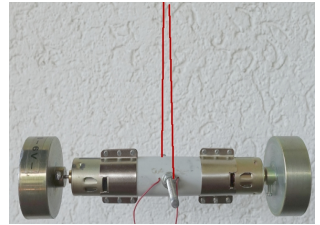


Abb.14.19

von $\mathbf{L}'$ dreht sich mit ω' , erfährt somit eine Änderung, der ein Teil des Drehmoments mit dem Betrag $m \cdot g \cdot r$ zugeordnet werden muss. Bei waagrechter Lage der Figurenachse (siehe Abb.14.19) ist $\mathbf{L}'$ ein konstanter, senkrecht nach oben gerichteter Vektor. Nur in diesem Fall ist das obige Ergebnis fehlerfrei. In der Abb.14.19 ist der im Kapitel 13.3.2 beschriebene Kreiselkompass abgebildet. Er ist hier in seiner Mitte waagrecht aufgehängt. Die tragenden Fäden laufen nach oben hin zusammen. Wird im Abstand d vom Schwerpunkt ein Gewicht mit der Masse m angehängt, dann dreht sich der Kreisel in waagrechter Lage mit $\omega' = m \cdot g \cdot d / (\omega \cdot J)$.

Nutation

Stößt man das rechte Ende des in der Abb.14.19 dargestellten Kreisels nach hinten, dann erhält der Kreisel zu dem vorhandenen Drehimpuls $\mathbf{L}_Z$ einen Zusatzimpuls $\mathbf{L}_S$ (siehe Abb.14.20). Wirkt kein Drehmoment am Kreisel, dann bleibt der neu gewonnene Drehimpuls $\mathbf{L}$ (Impulssumme $\mathbf{L} = \mathbf{L}_Z + \mathbf{L}_S$) konstant. Um ihn kreist dann die zu $\mathbf{L}_Z$ parallele

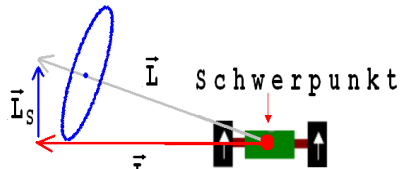


Abb.14.20

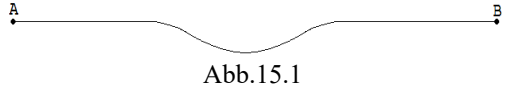
Figurenachse, wobei sie einen Kegelmantel (Nutationskegel) beschreibt.

15. Wellen

15.1 Quer- und Längswellen, Wellengeschwindigkeit

Seilwelle

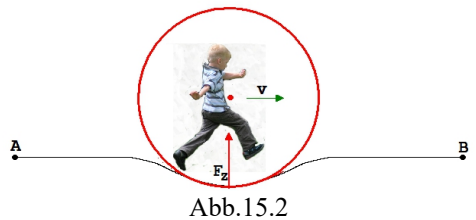
In Abb.15.1 ist ein Seil zu sehen, welches zwischen den Punkten A und B aufgespannt ist. Wird auf das eine Ende dieses Seils geschlagen, dann bildet sich eine Verformung aus, die sich selbständig zum anderen Ende hin mit einer Geschwindigkeit v ausbreitet. Was sich hier mit v bewegt, ist kein Teil des Seiles, sondern eine Zustandsänderung des Seils. Eine sich ausbreitende Zustandsänderung wird Welle genannt. In dem hier beschriebenen Fall spricht man von einer Seilwelle. Die Berechnung der Geschwindigkeit, mit der sich diese Seilwelle ausbreitet erscheint zunächst sehr schwierig.



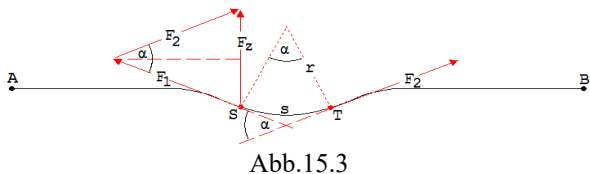
Wie soll $F = m \cdot a$ angewandt werden ?

Eine Änderung in der Betrachtungsweise bringt bekanntlich oft völlig unerwartete Einsichten. Dies ist auch hier der Fall. Man muss mit den Augen eines Beobachters schauen, der die Verformung (Wellenberg) mit der Wellengeschwindigkeit v begleitet. Dieser sieht das Seil unter dem Einfluss von Zentralkräften F_z mit v durch einen Bogen fließen (Abb. 15.2).

Wir betrachten ein Bogenstück s aus dieser Seilwelle zwischen den Punkten S und T mit der Masse m (Abb.15.3). Die Zentripetalkraft $F_z = m \cdot v^2 / r$ auf dieses Bogenstück ist die Resultierende der bei S und T angreifenden Fadenzugkräfte F_1 und F_2 mit übereinstimmenden Beträgen F .



r ist der Krümmungsradius von s . Hierunter verstehen wir den Radius des Kreises, der dem Bogenstück s angepasst werden kann.



$$F_z / 2 = F \cdot \sin(\alpha / 2) \rightarrow F_z = 2 \cdot F \cdot \sin(\alpha / 2) \rightarrow m \cdot v^2 / r = 2 \cdot F \cdot \sin(\alpha / 2)$$

$$m/s = \sigma \quad (\sigma = \text{längenbezogene Dichte}) \rightarrow m = s \cdot \sigma$$

$$s = \alpha \cdot r \quad (\alpha = \text{Winkel im Bogenmaß}) \rightarrow m = \alpha \cdot r \cdot \sigma$$

Setzt man $\alpha \cdot r \cdot \sigma$ für m in $2 \cdot F \cdot \sin(\alpha / 2) = m \cdot v^2 / r$ ein, dann gelangt man zu:

$$2 \cdot F \cdot \sin(\alpha / 2) = \alpha \cdot r \cdot \sigma \cdot v^2 / r \rightarrow 2 \cdot F \cdot \sin(\alpha / 2) = \alpha \cdot \sigma \cdot v^2$$

Bei kleinen Winkeln α (Winkel im Bogenmaß) kann geschrieben werden: $\sin(\alpha / 2) = \alpha / 2$

$$2 \cdot F \cdot \sin(\alpha / 2) = \alpha \cdot \sigma \cdot v^2 \rightarrow 2 \cdot F \cdot \alpha / 2 = \alpha \cdot \sigma \cdot v^2 \rightarrow F = \sigma \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{F / \sigma}$$

Messung der Wellengeschwindigkeit

Ein dünnes Seil ist zwischen einem Scharnier Sa an der Experimentierwippe und einer um $s = 5\text{ m}$ entfernten Rolle aufgespannt (siehe Abb.15.4). Das angehängte Gewicht sorgt für eine bestimmte Zugkraft F .

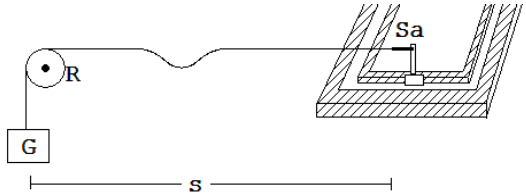


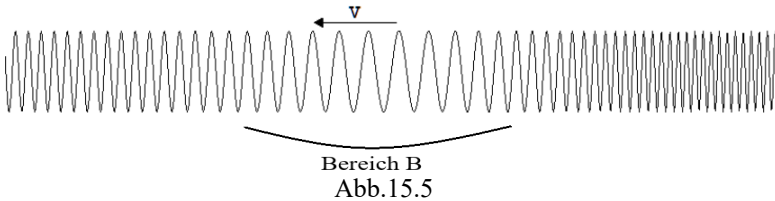
Abb.15.4

Mit einem kurzen Schlag auf das Seil entsteht eine Welle, die zwischen R und Sa mehrfach hin und her reflektiert wird. Die Erschütterung, welche die Wippe bei einer Reflexion erfährt, wird von einem Rechner registriert. Die Zeitdifferenz t zwischen zwei aufeinander folgenden Erschütterungen ist die Laufzeit einer Welle entlang einer 10 m langen Strecke. $2 \cdot s / t =$ Wellengeschwindigkeit.

Federwelle

Eine lange Schraubenfeder der Länge L und der Masse m ist unter der Zugkraft F zwischen einer Wand und der Hand eines Schülers aufgespannt. Der Schüler zieht plötzlich ruckartig an der Feder und erzeugt damit nahe seiner Hand einen stärker gedehnten Bereich B. B bewegt sich als Welle anschließend mit einer Geschwindigkeit v über die gesamte Feder (siehe Abb.15.5). Er wird an den Enden hin und her reflektiert.

Geschwindigkeit des Beobachters, der die Welle begleitet



Bereich B

Abb.15.5

Wünscht man eine Gleichung für die Wellengeschwindigkeit v , dann sollte man wie im Falle der Seilwelle zum besseren Verständnis mit den Augen eines Beobachters schauen, der B mit v begleitet. Aus seiner Sicht wandert eine Windung nach der anderen von links mit der Geschwindigkeit v in B hinein. Die Windungen mit der Anfangslänge L' und der Masse m' werden gedehnt, was zu einer Beschleunigung a ihrer Schwerpunkte führt. Schließlich nimmt die Dehnung der Windungen wieder ab. Die Schwerpunkte werden auf die Geschwindigkeit v gebremst (siehe Abb.15.6).

Diese 3 Windungen treten aus der Sicht des die Welle begleitenden Beobachters mit der Geschwindigkeit v in den Bereich B ein und werden dabei gedehnt.

Diese 3 Windungen treten aus dem Bereich B aus und werden dabei wieder auf die Normalgröße gestaucht



Abb.15.6

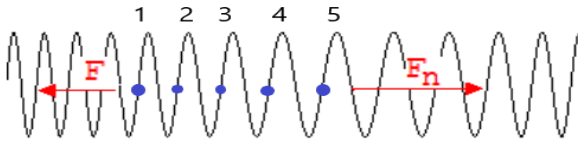


Abb.15.7

Wir betrachten die ersten sich dehrenden n Windungen im Bereich B (siehe Abb.15.7) und denken uns diese Windungen von links nach rechts nummeriert. Die Nummer 1 ist aus der Sicht des mitbewegten Beobachters gerade mit der Geschwindigkeit v in B eingetreten. Auf die n Windungen wirkt insgesamt die Kraft $F_n - F = m' \cdot a_n + m' \cdot a_{n-1} + \dots + m' \cdot a_2 + m' \cdot a_1 = m' \cdot (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1)$. F und F_n sind die Zugkräfte an der 1. und der n . Windung. Die Zugkraft auf die n . Windung ist in B von anfangs F (Kraft eine nicht im Wellenbereich liegende Windung) auf F_n gestiegen. Sie ist demnach um $F_n - F = m' \cdot (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1)$ größer geworden und hat dabei die n . Windung mit der Anfangslänge L' um $\Delta L' = (F_n - F) / D'$ gedehnt (D' : Federkonstante einer Windung).

$$\Delta L' = (F_n - F) / D' = m' \cdot (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1) / D'$$

Wenn B in der Zeit Δt eine weitere Windung erfasst dann tritt die $(n-1)$. Windung an die Stelle der n . Windung und verschiebt diese aus der Sicht des mitbewegten Beobachters um $L' + \Delta L'$ nach rechts. Die zuvor n . Windung hat dann für den mitbewegten Beobachter die Geschwindigkeit $(L' + \Delta L') / \Delta t = v + \Delta L' / \Delta t$. Somit wurde ihre Geschwindigkeit der n . Windung in B um $\Delta L' / \Delta t = [m' \cdot (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1) / D'] / \Delta t$ vergrößert.

Diese Geschwindigkeitsänderung kann auch auf andere Art berechnet werden: Die n . Windung hat als 1., 2., 3., ..., n . Windung jeweils während einer Zeit Δt die Geschwindigkeitszuwächse $a_1 \cdot \Delta t$, $a_2 \cdot \Delta t$, $a_3 \cdot \Delta t$, usw. erfahren.

$$\Delta L' / \Delta t = a_1 \cdot \Delta t + a_2 \cdot \Delta t + a_3 \cdot \Delta t + \dots + a_n \cdot \Delta t = \Delta t \cdot (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1)$$

$$\downarrow$$

$$m' \cdot [(a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1) / D'] / \Delta t = \Delta t \cdot (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1)$$

$$\downarrow$$

$$m' / D' = \Delta t^2 \rightarrow \Delta t = 1 / \sqrt{D' / m'} \rightarrow v = L' / \Delta t = L' \cdot \sqrt{D' / m'}$$

D' und m' (Federkonstante und Masse einer Windung) können anhand der Masse m und der Federkonstanten D der gesamten aus j Windungen bestehenden Feder berechnet werden.

$$m = j \cdot m' \rightarrow m' = m / j$$

Ist eine Windung um $\Delta L'$ gedehnt, dann ist die gesamte Feder bei gleichmäßiger Dehnung um $j \cdot \Delta L'$ verlängert. Die Kraft einer Windung gleich der Kraft der gesamten Feder.

$$D \cdot j \cdot \Delta L' = D' \cdot \Delta L' \rightarrow D' = j \cdot D$$

$$\downarrow$$

$$v = L' \cdot \sqrt{D \cdot j / (m / j)} = L' \cdot \sqrt{D \cdot j^2 / m} = j \cdot L' \cdot \sqrt{D / m}, \quad j \cdot L' \text{ ist die Federlänge } L$$

$$\downarrow$$

$$v = L \cdot \sqrt{D / m}$$

Die Welle als Kraftfeld

Einen Wellenträger können wir gedanklich in viele Abschnitte gleicher Masse einteilen und jedem dieser Abschnitte eine beschleunigende Kraft $\mathbf{F}$ zuordnen. Nach der Richtung von $\mathbf{F}$ unterscheidet man Längs- und Querwellen. Ist $\mathbf{F}$ wie bei der Federwelle parallel zur

Ausbreitungsrichtung, dann spricht man von einer **Längswelle (Longitudinalwelle)**, andernfalls, z.B. im Fall der Seilwelle, von einer **Querwelle (Transversalwelle)**. Die Kräfte **F** bilden ein Kraftfeld.

15.2 Die periodische, fortschreitende Welle

Wird ein Ende eines gespannten Seils periodisch auf und ab bewegt, dann entsteht eine Welle aus periodisch wiederkehrenden gleichen Abschnitten der Länge λ (siehe Abb.15.8). λ wird Wellenlänge genannt. Der Wellenzug regt jeden Punkt P, den er erfasst, zu Schwingungen (periodisch wechselnden Zustandsänderungen) an.

P habe zu einem Zeitpunkt t seine maximale Auslenkung nach oben erreicht. Rückt die Welle danach um $\Delta s = \lambda/4$ nach rechts, dann nimmt P seine Mittellage ein und nach einer weiteren Wellenverschiebung um $\Delta s = \lambda/4$ hat P seine tiefste Lage. Ist die Welle insgesamt um λ voran gekommen, dann hat P wieder sein größte Auslenkung nach oben.

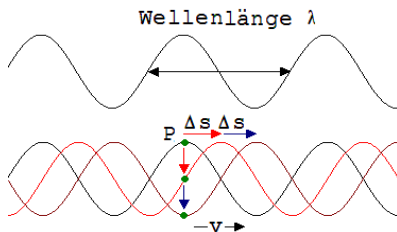


Abb.15.8

Die Schwingungsfrequenz f , die Schwingungszeit T und die Amplitude A der Punkte P sind Kenngrößen der Welle. Breitet sich eine Welle um λ aus, dann verursacht sie eine volle Schwingung von P . Daher gilt für die Wellengeschwindigkeit v :

$$v = \lambda/T \quad (T = \text{Schwingungszeit}), \quad 1/T = f \quad (\text{Frequenz}) \quad \rightarrow \quad v = \lambda \cdot f$$

15.3 Die stehende Welle (Interferenz)

Wir stellen uns ein gespanntes Seil vor, dessen beide Enden periodisch mit gleicher Frequenz f auf und ab bewegt werden. Es bildet sich hierbei eine als **stehende Welle** bekannte Schwingungsform aus, die durch Stellen der Ruhe

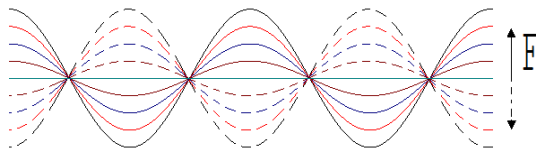


Abb.15.9

(**Knoten**) und Stellen maximaler Bewegung (**Bäuche**) ausgezeichnet ist (siehe Abb.15.9). Setzt man voraus, dass es sich bei gemeinsamer Wirkung mehrerer Wellen so verhält, als ob sich die den Wellen zugeordneten Kraftfelder gegenseitig durchdringen und hierbei mit der Summe ihrer Kräfte wirken, dann ist dieses Phänomen leicht erklärbar. Die Zustandsänderung an einem bestimmten Ort in einer stehenden Welle erhält man demnach, indem man die Wirkung einer nach links laufenden Welle (Kraftfeld) zu der einer von links kommenden Welle addiert.

Dieser als Interferenz (Überlagerung von Kraftfeldern) bekannte Sachverhalt wird durch Abb.15.10 veranschaulicht. Deutlich sind die Stellen (Knoten) zu erkennen, an denen sich die hin- und her laufenden Wellen in ihrer Wirkung aufheben.

Der Abstand zweier benachbarter Knoten beträgt eine halbe Wellenlänge $\lambda/2$.

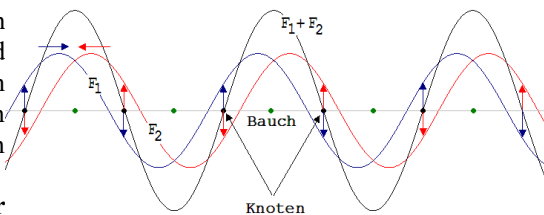


Abb.15.10

Eigenschwingungen von Wellenträgern

Zwischen zwei Punkten A und B sei ein Seil der Länge L aufgespannt. Wird das Endstück bei A periodisch auf und ab bewegt, dann entsteht eine stehende Welle, die man als Ergebnis einer Interferenz zweier einander entgegenlaufender Wellen (W_1 und W_2) auffassen kann. W_1 geht vom Wellenerreger bei A aus, W_2 entsteht durch Reflexion von W_1 am Ende B. Bei bestimmten Schwingungsfrequenzen wird W_2 bei A so reflektiert, dass ihre Wellenberge und Wellentäler mit den Bergen und Tälern der bei A erzeugten Welle zusammentreffen. Unter diesen Bedingungen bleibt die stehende Welle auch dann noch erhalten, wenn man das Seil nicht mehr bewegt. Man spricht in diesem Fall von einer Eigenschwingung. Die Knoten an den Enden des Seils zeigen an, dass die Kraft einer Welle bei Reflexion am festen Seilende eine Phasenumkehr erfährt. Aus $+F$ wird $-F$. Nach zweimaliger Reflexion an den beiden festen Seilenden wirkt sich diese Phasenumkehr nicht aus. Deshalb ist die Bedingung für eine Eigenschwingung erfüllt, wenn der Weg einer Welle von A nach B und zurück (2 Reflexionen) ein Vielfaches der Wellenlänge λ ist.

$$2 \cdot L = n \cdot \lambda \quad (n: \text{natürliche Zahl}) \rightarrow \lambda = 2 \cdot L / n$$

$$\lambda = 2 \cdot L / n, \quad v = \lambda \cdot f, \quad v: \text{Wellengeschwindigkeit}, \quad f: \text{Frequenz der Welle} \rightarrow f = n \cdot v / (2 \cdot L)$$

Auf einem eingespannten Seil sind demnach mehrere Eigenschwingungen möglich. Die Schwingung mit $n = 1$ heißt **Grundschiwingung**, die mit $n = 2$ **erste Oberschiwingung** usw. . Nach $L = n \cdot \lambda / 2$ ist bei der Grundschiwingung die gesamte Seillänge gleich der halben Wellenlänge. Da zwei benachbarte Knoten eine halbe Wellenlänge voneinander entfernt sind, gibt es bei der Grundschiwingung neben den Seilenden keine weiteren Knoten. Die erste Oberschiwingung hat einen dritten Knoten in der Mitte.

Eigenschwingungen in einer Wasserwanne

Erzeugt man eine Welle in einer mit Wasser gefüllten Wanne, dann bildet sich eine stehende Wasserwelle aus, deren Schwingungen mit Hilfe der Experimentierwippe registriert werden können. Bei einer Grundschiwingung ist die Länge L der Wannegleich $\lambda / 2$. Die Wellengeschwindigkeit v kann in diesem Fall nach $v = \lambda \cdot f = 2 \cdot L \cdot f$ berechnet werden.



Abb.15.11

Eigenschwingungen einer Schraubenfeder

Die Länge L einer beidseitig eingespannten, schwingenden Schraubenfeder ist gleich $n \cdot \lambda / 2$ ($n = 1$ oder 2 oder 3....). Für die Geschwindigkeit v einer Längswelle auf einer Feder mit der Federkonstanten D und der Masse m wurde hergeleitet: $v = L \cdot \sqrt{D / m}$.

$$f = v / \lambda, \quad L = n \cdot \lambda / 2$$

$$\downarrow$$
$$f = (n \cdot \lambda / 2) \cdot \sqrt{D / m} / \lambda = (n / 2) \cdot \sqrt{D / m} \rightarrow f_{\text{Grundschiwingung}} = (1/2) \cdot \sqrt{D / m}$$

Eigenschwingungen in einer Pfeife

Von einer schwingenden Stimmgabel geht eine Folge von Luftverdichtungen und Luftverdünnungen aus (siehe Abb.15.12). Der Luftdruck schwankt um den Normaldruck, wie dies durch das Diagramm in der Abb.15.12

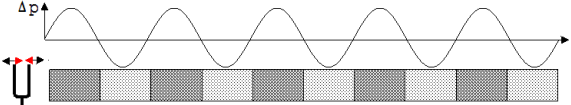


Abb.15.12

angezeigt wird. Zwischen zwei schwingenden Stimmgabeln gleicher Frequenz bildet sich eine stehende Schallwelle aus. Sie ist durch Bereiche mit großen Druckschwankungen Δp (Bäuche) und durch solche ohne Druckschwankungen (Knoten) ausgezeichnet. Durch einen Knoten (ohne Druckschwankungen) strömt fortwährend Luft zu

einem Wellenbauch hin oder von einem Wellenbauch fort. Eine stehende Welle in einem Rohr bewirkt mit dieser Strömung, dass im Rohr verteiltes Korkmehl an den Druckbäuchen angehäuft wird (siehe Abb.15.13).

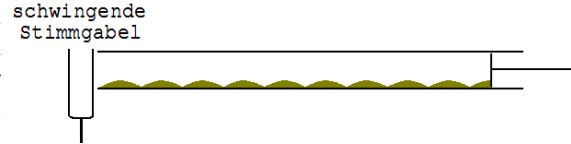


Abb.15.13: Kundtscher Versuch

Eigenschwingungen in der Form stehender Schallwellen werden in einer Pfeife erzeugt. Die Abb.15.14 und 15.15 zeigen die Beschaffenheit einer Pfeife. Wir sehen einen hohlen Rundstab mit einem schrägen Einschnitt. Ein kleiner einseitig angeschliffener Zylinder ist in die runde Öffnung eingeschoben. Er verschließt diese Öffnung bis auf einen kleinen Schlitz. Wird in diesen Schlitz geblasen, dann strömt Luft gegen den Rand A des schrägen Einschnitts (siehe Abb.15.16).



Abb.15.14



Abb.15.15

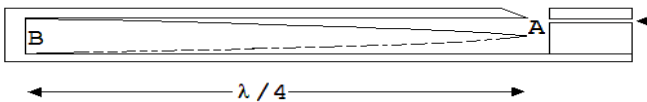


Abb.15.16

Es bildet sich im Hohlraum der Pfeife eine stehende Welle. Am geschlossenen Ende B ist ein Knoten bezüglich der Luftströmung und somit ein Bauch bezüglich der Druckschwankung. Bei A ist ein Bauch bezüglich der hin und her schwingenden Luft und somit ein Knoten bezüglich der Druckschwankung. Die stehende Welle in der Pfeife kann die Länge $\lambda/4$ oder $3 \cdot \lambda/4$ oder $5 \cdot \lambda/4$ haben. Die Länge L des Hohlraums ist somit ein ungerades Vielfaches von $\lambda/4$. Der Luftstrom gegen die Kante A wird von der Strömung in der Welle abwechselnd nach außen und innen gelenkt (siehe Abb.15.17). So erhält er die Eigenschwingung.

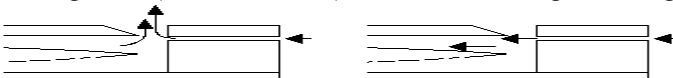


Abb.15.17

Wenn nur ein einziger Druckbauch im Hohlraum der Länge L ist (Grundschiwingung), dann gilt $\lambda / 4 = L$. $\rightarrow \lambda = 4 \cdot L$

$$v_{\text{Schall}} = \lambda \cdot f \text{ (f: Frequenz des Tons)} \rightarrow f = v_{\text{Schall}} / \lambda = v_{\text{Schall}} / (4 \cdot L)$$

L der oben abgebildeten Pfeife ist 9 cm.

$$L = 9 \text{ cm, } v_{\text{Schall}} = 330 \text{ m/s, } f = 330 \text{ (m/s)} / 0,36 \text{ m} = 916 \text{ Hz}$$

15.4 Interferenz von Kreiswellen

Wir stellen uns zwei Stifte vor, die regelmäßig und gleichzeitig in stehendes Wasser eintauchen. Von den Eintauchstellen gehen zwei kreisförmige, einander überlagernde Wasserwellen aus. Die kreisförmigen Wellenberge und Wellentäler, die von einem Erregungszentrum ausgehen, kann man auf dem Bildschirm eines Rechners durch rote und grüne Ringe darstellen (siehe Abb.15.18) .

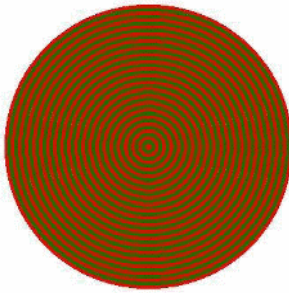


Abb.15.18

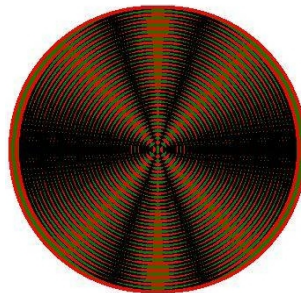


Abb.15.19

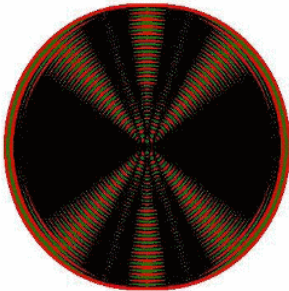


Abb.15.20

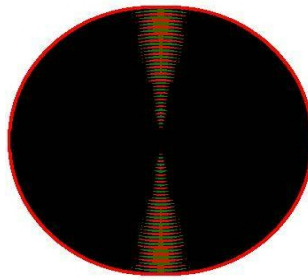


Abb.15.21

Eine Vorstellung von der Wechselwirkung (Interferenz) zweier derartiger Kreiswellen gewinnt man, wenn man eine Kopie K von der Abb.15.18 so anlegt, dass das Zentrum der Kopie von dem des Originals etwa 12 Bildpunkte entfernt ist. So wird ein Bild geschaffen (siehe Abb.15.19), an dem das Wesentliche der Interferenz deutlich auffällt. Dort, wo die Farben Rot und Grün zusammentreffen, bildet sich Schwarz. Dies entspricht der Interferenz eines Wellenberges mit einem Wellental (Wellenberge und Wellentäler heben sich in ihrer Wirkung auf). Das Interferenzmuster weist Streifen maximaler Erregung und solche ohne Erregung auf.

Wird eine Vielzahl von Kopien der Abb.15.18 so angelegt, dass die Kreismittelpunkte (Wellenzentren) im Abstand von 12 Bildpunkten entlang einer Geraden aufeinander folgen,

dann ist zu erkennen, dass die Bereiche maximaler Erregung mit zunehmender Zahl der Wellenzentren schmaler und ausgeprägter werden (siehe Abb.15.20). Abb.15.21 wurde durch Überlagerung von 20 Ringsystemen mit jeweils 1 Bildpunkt Abstand erhalten. An diesem Bild erkennen wir:

Gehen von vielen direkt nebeneinander liegenden Punkten Kreiswellen aus, dann bildet sich ein Strahl.

15.15 Über die Wellennatur des Lichtes

Trifft eine Welle mit gerader Wellenfront, wie in der Abb.15.22 angedeutet, auf einen Schirm mit einem Doppelspalt, dann entstehen hinter den beiden Spalten Halbkreiswellen und bilden ein Interferenzmuster. Auch das Licht zeigt solche Interferenzerscheinungen, weshalb wir von Lichtwellen sprechen können. Lässt man z.B. einen Laserstrahl auf einen Doppelspalt (Abstand der Spalte = Gitterkonstante $g \approx 10 \mu = 10^{-2}$ mm) fallen, dann sehen wir auf einem Schirm hinter dem Doppelspalt helle und dunkle Streifen, welche Interferenzmaxima und Interferenzminima anzeigen (siehe Abb.15.22).

Die hier beschriebene Erscheinung ermöglicht auch die Bestimmung einer Lichtwellenlänge λ (siehe Abb.15.23). Ein Punkt P des Schirms liegt dann in einem Lichtmaximum, wenn sich seine Abstände s_1 und s_2 von den beiden Spalten entweder nicht oder um ein ganzzahliges Vielfaches von λ unterscheiden.

Unter diesen Bedingungen kommt ein Wellenberg von einem Spalt zu einem Wellenberg des anderen Spalts.

Ist $s_1 = s_2$, dann spricht man vom Maximum 0. Ordnung.

Ist $|s_1 - s_2| = \lambda$, dann hat man ein Maximum 1. Ordnung usw..

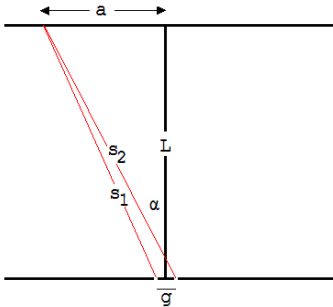


Abb.15.23

a sei der auf dem Schirm erkennbare Abstand zwischen dem Maximum 0.Ordnung und einem Maximum 1.Ordnung (siehe Abb.15.23).

$$s_2 - s_1 = \lambda$$

Da g im Vergleich zu L (Abstand des Schirmes vom Doppelspalt) sehr klein ist, können die Strecken s_1 und s_2 als parallel behandelt werden. Unter dieser Voraussetzung kann die Differenz $d = s_2 - s_1$, wie in der Abb.15.24 angedeutet, berechnet werden.

$$d = \lambda = g \cdot \sin \alpha$$

Mit Blick auf die Abb.15.23 (g ist sehr klein) können wir $\tan \alpha = a / L$ setzen. Das zum Maximum 1. Ordnung gehörende α ist so klein, dass $\sin \alpha \approx \tan \alpha$ ist.

$$\sin \alpha \approx a/L; \quad \lambda = g \cdot \sin \alpha \rightarrow \lambda \approx a \cdot g/L$$

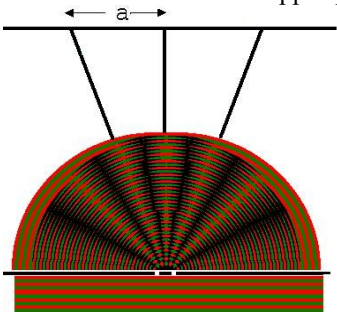


Abb.15.22

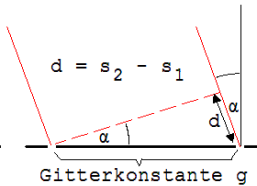


Abb.15.24

Wenn statt des Laserlichts weißes Licht auf den Doppelspalt fällt, dann erhält man violette, blaue, grüne, gelbe, orange und rote Linienmuster auf dem Schirm. Dies zeigt an, dass weißes Licht eine Mischung aus Wellen unterschiedlicher Wellenlängen ist. Den verschiedenen Wellenlängen sind bestimmte Farbeindrücke zuzuordnen. Die Lichtwellen, die einen Farbeindruck in unserem Auge hinterlassen, haben Wellenlängen zwischen $0,4 \mu$ (Violett) und $0,7 \mu$ (Rot).

16. Lösungen zu den Aufgaben

Kapitel 3.4:

Zu 1.:

Der Schwerpunkt des Wagens ist in der Wagenmitte zu sehen. Zu Anfang liegt der gemeinsame Schwerpunkt von Person und Wagen rechts von der Mitte mit dem Abstand d .

$$d = (m_P \cdot d_P + m_W \cdot 0) / (m_W + m_P) = 90 \text{ kg} \cdot 2,5 \text{ m} / 190 \text{ kg} = 1,18 \text{ m}.$$

Die Person hat anfangs den Abstand $d_P = 2,5 \text{ m}$ von der Mitte.

Am Ende liegt der Schwerpunkt links von der Mitte im $1,18 \text{ m}$ von ihr. Da der Schwerpunkt ruht, bewegt sich der Wagen um $2 \cdot d = 2,36 \text{ m}$.

Zu 2.:

Der Wagen hat vor dem Ereignis in Richtung der Schiene den Impuls $m_0 \cdot v_0$. Die fallenden Säcke mit je $m = 50 \text{ kg}$ haben in Schienenrichtung den Impuls 0. Somit gilt: Der Impuls des Wagens vor dem Ereignis ist gleich dem Impuls des Wagens nach dem Ereignis.

$$m_0 \cdot v_0 = (m_0 + 2 \cdot m) \cdot v \rightarrow v = m_0 \cdot v_0 / (m_0 + 2 \cdot m)$$

$$v = 250 \text{ kg} \cdot 5 \text{ m/s} / (250 \text{ kg} + 2 \cdot 50 \text{ kg}) = 3,57 \text{ m/s}$$

Zu 3.:

Man denke sich ein Koordinatensystem, dessen x-Achse nach rechts weist. Unter dieser Voraussetzung ist $v_1 = -2 \text{ m/s}$ und $v_2 > 0$.

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0 \rightarrow v_2 = -(m_1 / m_2) \cdot v_1, \quad v_2 = 300 / 250 \text{ m/s} = 1,2 \text{ m/s}$$

Kapitel 3.7:

Zu 1.:

Der Geschwindigkeitszuwachs während der Beschleunigungszeit Δt beträgt $\Delta v = a \cdot \Delta t$.

$$v = v_0 + \Delta v = v_0 + a \cdot \Delta t; \quad a = F/m$$

$$v = v_0 + F/m \cdot \Delta t \rightarrow v = 0,5 \text{ m/s} + 0,3 \text{ N} / 0,2 \text{ kg} \cdot 4 \text{ s} = 6,5 \text{ m/s}$$

Zu 2.:

Sofort nach dem Zusammenstoß ist der Impuls von Bremsklotz + Wagen gleich dem Impuls des Wagens vor dem Stoß. $(m_B + m_W) \cdot v = m_W \cdot v_0$. v = Geschwindigkeit unmittelbar nach dem Stoß. Nach dem Stoß wird der Bremsklotz mit dem Wagen unter der Kraft $F = 0,5 \text{ N}$ auf die Geschwindigkeit 0 abgebremst. Die Geschwindigkeitsänderung Δv während des Bremsens ist demnach gleich v .

$$v = a \cdot \Delta t; \quad a = F/(m_B + m_W) \rightarrow \Delta t = v \cdot (m_B + m_W) / F, \quad v = m_W \cdot v_0 / (m_B + m_W)$$

$$\Delta t = m_W \cdot v_0 / F \rightarrow \Delta t = 0,3 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s} / 0,5 \text{ N} = 1,8 \text{ s}$$

Kapitel 4.1

Zu1.:

$$(m_1 + m_2) \cdot a = m_2 \cdot g \rightarrow a = m_2 \cdot g / (m_1 + m_2)$$
$$v = a \cdot t = [m_2 \cdot g / (m_1 + m_2)] \cdot t, \quad s = (1/2) \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot [m_2 \cdot g / (m_1 + m_2)] \cdot t^2$$
$$v = 0,02 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 3 \text{ s} / 0,22 \text{ kg} = 2,67 \text{ m/s}$$
$$s = \frac{1}{2} \cdot 0,02 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 9 \text{ s}^2 / 0,22 \text{ kg} = 4,01 \text{ m}$$

Zu2.:

Der Gegenstand erreicht in der Zeit t seinen höchsten Punkt mit der Koordinaten y (am Koordinatenursprung beginnt der Wurf) und hat dann die Geschwindigkeit 0. Die Geschwindigkeitsänderung in t ist somit v_0 .

$$v_0 / t = g, \quad t = v_0 / g = 10 \text{ m/s} / 9,81 \text{ m/s}^2 = 1,02 \text{ s}$$
$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t = 5,1 \text{ m}, \quad \text{Wurfdauer: } t_w = 2 \cdot t = 2,04 \text{ s}$$

Zu 3.: Am Ort des Aufschlags sei der Ursprung eines Koordinatensystems, dessen y -Achse nach oben weist.

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + y_0; \text{ beim Aufschlag gilt: } y = 0$$
$$-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + y_0 = 0 \rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 - 5 \text{ m/s} \cdot t + 10 \text{ m} = 0$$

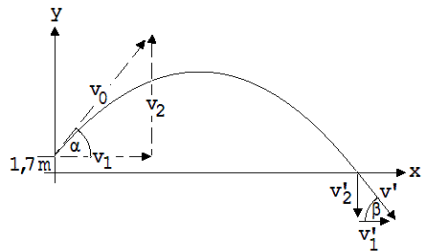
Es handelt sich um eine quadratische Gleichung mit den Lösungen:

$$t_1 = -2 \text{ s (unpassend)} \text{ und } t_2 = 1 \text{ s}$$
$$v = -g \cdot t + v_0; v = -9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ s} - 5 \text{ m/s}; v = -14,81 \text{ m/s}$$

Zu 4.:

Am höchsten Punkt ist $v_y = 0$ (t ist die Steigzeit)

$$v_1 = v_0 \cdot \cos \alpha, \quad v_2 = v_0 \cdot \sin \alpha$$
$$v_y = v_2 - g \cdot t \rightarrow t = v_2 / g$$
$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_2 \cdot t + y_0 \quad (y_0 = 1,7 \text{ m})$$
$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot v_2^2 / g^2 + v_2^2 / g + y_0$$
$$y = \frac{1}{2} \cdot v_2^2 / g + y_0$$
$$y = \frac{1}{2} \cdot v_0^2 \cdot \sin^2(\alpha) / g + y_0 \rightarrow \text{Wurfhöhe } y = 7,4 \text{ m}$$



$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_2 \cdot t + y_0 \quad (t \text{ steht für die Wurfzeit}).$$

Beim Aufschlag gilt: $y = 0$

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + t \cdot v_0 \cdot \sin \alpha + y_0 \quad (\text{quadratische Gleichung für } t)$$

$$t_1 = -0,15 \text{ s (unpassend)}; t_2 = 2,3 \text{ s}$$

$$\text{Wurfweite } x = v_1 \cdot t_2 = v_0 \cdot (\cos \alpha) \cdot t_2 \rightarrow \text{Wurfweite } x = 24,4 \text{ m}$$

Vektor v der Endgeschwindigkeit:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} \cdot t = \{v_0 \cdot \cos(\alpha); v_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t_2\} = \{v'_1; v'_2\} = \{10,6 \text{ m/s}; -12 \text{ m/s}\}$$
$$|\mathbf{v}| = 16 \text{ m/s}, \quad \text{Aufschlagwinkel: } \tan(\beta) = 12 / 10,6 \rightarrow \beta = 48,5^\circ$$

Kapitel 5

Zu 1.:

Der Boden des Eimers und die Erde üben Kräfte auf das Wasser aus. Am höchsten Punkt ist die Summe aus der Bodenkraft F_B und der Gewichtskraft $m \cdot g$ die Zentripetalkraft auf das

Wasser der Masse m .

$m \cdot g + F_B = m \cdot v^2 / r$ Ist $F_B = 0$, dann hält sich das Wasser gerade noch im Eimer.

$$m \cdot g = m \cdot v^2 / r \rightarrow g = v^2 / r \rightarrow v^2 = g \cdot r \rightarrow v = 2,8 \text{ m/s}$$

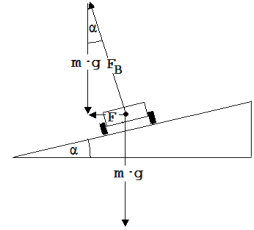
Zu 2.:

Die Straße und die Erde üben die Kräfte F_B und $m \cdot g$ auf das Auto aus. Die Zentripetalkraft F ist die Resultierende aus diesen beiden Kräften.

$$\tan \alpha = F / (m \cdot g); \quad F = m \cdot v^2 / r$$

$$\downarrow$$

$$\tan \alpha = v^2 / (g \cdot r) \rightarrow \alpha = 57^\circ$$



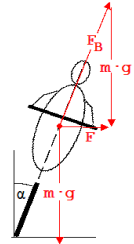
Zu 3.:

Die Straße und die Erde üben auf den Fahrer und das Fahrrad (gemeinsamer Schwerpunkt !) die Kräfte F_B und $m \cdot g$ aus.

m = Masse des Fahrrads + Masse des Fahrers

$$\tan \alpha = F / (m \cdot g), \quad F = m \cdot v^2 / r$$

$$\tan \alpha = v^2 / (r \cdot g) \rightarrow \alpha = 8,9^\circ$$



Zu 4.:

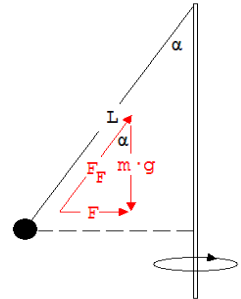
Der Faden und die Erde wirken mit den Kräften F_F und $m \cdot g$ auf die Kugel ein. Die Resultierende dieser beiden Kräfte wirkt als Zentripetalkraft F .

$$\tan \alpha = F / (m \cdot g); \quad F = m \cdot \omega^2 \cdot r \rightarrow \tan \alpha = \omega^2 \cdot r / g$$

$$r = L \cdot \sin \alpha; \quad \sin \alpha / \cos \alpha = \omega^2 \cdot r / g$$

$$\sin \alpha / \cos \alpha = \omega^2 \cdot L \cdot \sin \alpha / g \rightarrow 1 / \cos \alpha = \omega^2 \cdot L / g$$

$$\cos \alpha = g / (\omega^2 \cdot L) \rightarrow \alpha = 78^\circ$$



Zu 5.:

Die Gewichtskraft kann man in die zwei Komponenten F_1 und F_2 zerlegen. F_2 sorgt für die Beschleunigung entlang der Bahn. F_1 bildet mit F_B die Zentripetalkraft. F_B ist die Kraft, welche das Rohr auf das Wägelchen ausübt. An der Ablösestelle ist $F_B = 0$. In diesem Fall gilt:

$$F_1 = m \cdot v^2 / r, \quad F_1 = m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$m \cdot g \cdot \cos \alpha = m \cdot v^2 / r \rightarrow \cos \alpha = v^2 / (r \cdot g)$$

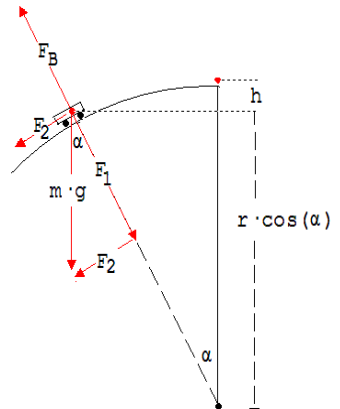
v^2 ist durch die Höhenänderung

$$h = r - r \cdot \cos \alpha = r \cdot (1 - \cos \alpha) \text{ bestimmt.}$$

$$\text{Es gilt: } v^2 = 2 \cdot g \cdot h = 2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos \alpha)$$

$$\cos \alpha = v^2 / (r \cdot g) = 2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos \alpha) / (r \cdot g)$$

$$\cos \alpha = 2 \cdot (1 - \cos \alpha) \rightarrow \cos \alpha = 2/3 \rightarrow \alpha = 48^\circ$$



Kapitel 6

Zu 1.:

G wird von der Erde mit $m_1 \cdot g$ nach unten gezogen. Dieser Kraft wirkt der Faden mit der Zugkraft F entgegen. Die resultierende Kraft ist $m_1 \cdot g - F$.

$$a \cdot m_1 = m_1 \cdot g - F$$

Der 160 g – Körper wird vom Faden mit F nach oben gezogen. Der Kraft F wirkt die Erde mit $m_2 \cdot g$ entgegen.

$$a \cdot m_2 = F - m_2 \cdot g \rightarrow F = a \cdot m_2 + g \cdot m_2$$

Setzt man den letzten Term in die erste Gleichung ein, dann erhält man:

$$a \cdot m_1 = m_1 \cdot g - a \cdot m_2 - g \cdot m_2 \rightarrow a = (m_1 \cdot g - m_2 \cdot g) / (m_1 + m_2)$$

$$a = 40g \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 / 360 \text{ g} = 1,09 \text{ m/s}^2; \quad v = a \cdot t = 1,09 \text{ m/s}^2 \cdot 0,5 \text{ s} = 54 \text{ cm}$$

$$s = (a/2) \cdot t^2 = 13,6 \text{ cm}$$

$$\text{Zugkraft } F \text{ des Fadens: } F = a \cdot m_2 + g \cdot m_2 \rightarrow m_2 \cdot (a + g) = 0,16 \text{ kg} \cdot 10,9 \text{ m/s}^2 = 1,74 \text{ N}$$

$$\text{Kraft auf die Rolle} = 2 \cdot F = 3,48 \text{ N}$$

Diese Kraft ist kleiner als die Gewichtskraft der am Faden hängenden Gegenstände !

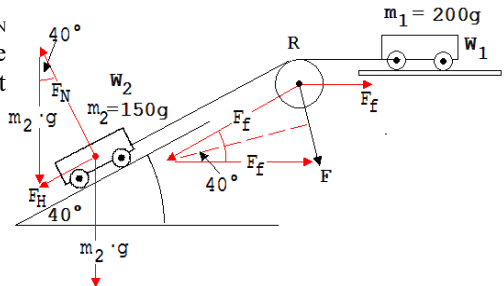
Zu 2.:

Auf W_2 wirkt die schiefe Ebene mit F_N (Normalkraft) und die Erde mit $m \cdot g$. Die Resultierende aus diesen beiden Kräften ist die Hangabtriebskraft F_H .

$$F_H = m_2 \cdot g \cdot \sin(40^\circ)$$

$$a = m_2 \cdot g \cdot \sin(40^\circ) / (m_1 + m_2)$$

$$a = 0,15 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 / 0,35 \text{ kg} = 2,7 \text{ m/s}^2$$



Von zwei Seiten zieht der Faden an der Rolle mit der Kraft F_f . Die beiden von links und rechts wirkenden Kräfte bilden F als Resultierende.

$$F_f = m_1 \cdot a, \quad F = 2 \cdot F_f \cdot \sin(20^\circ) \rightarrow F = 2 \cdot m_1 \cdot a \cdot \sin(20^\circ) = 0,36 \text{ N}$$

Zu 3.:

Das linke Gewicht wird unter der Kraft $m \cdot g - F_f$ beschleunigt. F_f = Zugkraft des Fadens nach oben.

$$m \cdot g - F_f = m \cdot a_1 \quad (a_1 = \text{Betrag der Beschleunigung}) \rightarrow F_f = m \cdot g - m \cdot a_1$$

Das rechte Gewicht wird unter $2 \cdot F_f - m \cdot g$ nach oben beschleunigt.

$$2 \cdot F_f - m \cdot g = m \cdot a_2; \quad a_2 = a_1 / 2 \rightarrow 2 \cdot F_f - m \cdot g = m \cdot a_1 / 2 \rightarrow F_f = m \cdot g / 2 + m \cdot a_1 / 4$$

$$F_f = m \cdot g - m \cdot a_1; \quad F_f = m \cdot g / 2 + m \cdot a_1 / 4 \rightarrow m \cdot g - m \cdot a_1 = m \cdot g / 2 + m \cdot a_1 / 4$$

$$a_1 = (2/5) \cdot g$$

Zu 4.:

Für die Endgeschwindigkeit v der Perle am Punkt B gilt: $v^2 = 2 \cdot g \cdot h$. Die Gleitzeit t erhält man nach $v = t \cdot a$
 $t = v / a$ (a ist die Beschleunigung der Perle).

$$t^2 = v^2 / a^2 = 2 \cdot g \cdot h / a^2$$

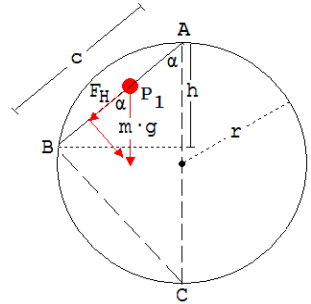
$$F_H = m \cdot a; \quad m \cdot g / F_H = g / a = c / h \rightarrow a = g \cdot h / c$$

$$t^2 = 2 \cdot c^2 / (g \cdot h)$$

Das Dreieck A,B,C ist nach dem Thalesatz rechtwinklig,
 somit gilt: $h \cdot (2r) = c^2$ (Kathetensatz !)

$$t^2 = 4 \cdot r / g$$

t^2 ist unabhängig vom Verlauf der Sehne immer gleich $4 \cdot r / g$.

**Kapitel 7:****Zu 1.:**

Das Auto wird unter der Gleitreibungskraft $F_R = F_N \cdot \mu$ gebremst.

$$F_N = m \cdot g \rightarrow F_R = m \cdot g \cdot \mu = m \cdot a \quad (a = |a|) \rightarrow a = g \cdot \mu$$

Da a der Bewegung entgegen gerichtet ist, schreiben wir $a = -g \cdot \mu$.

Für die Bremszeit t gilt demgemäß: $v_0 / t = g \cdot \mu \rightarrow t = v_0 / (g \cdot \mu)$

Für den Bremsweg s gilt: $s = -a/2 \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ (a ist der Bewegung entgegen gerichtet)

↓

$$s = (-g \cdot \mu / 2) \cdot v_0^2 / (g \cdot \mu)^2 + v_0^2 / (g \cdot \mu) \rightarrow s = 0,5 \cdot v_0^2 / (g \cdot \mu)$$

$$s = (100 \cdot 1000 / 3600 \text{ m/s})^2 / (9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,8) = 98,3 \text{ m}$$

Der Bremsweg ist dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional !

Bei 150 km/h ist der Bremsweg $1,5^2 \cdot 98,3 \text{ m} = 221 \text{ m}$.

Es ist noch anzumerken, dass auch beim Anfahren die Beschleunigung nicht über $g \cdot \mu_H$ hinausgehen kann.

Wird die Lauffläche der Räder stärker beschleunigt, dann drehen die Reifen durch.

Zu 2.:

Sofort nach dem Stoß ist der Impuls, den der Wagen zusammen mit dem Bremsklotz hat, gleich dem Impuls des Wagens vor dem Stoß.

$(m_2 + m_1) \cdot v_0 = m_1 \cdot v$; v_0 = Geschwindigkeit sofort nach dem Stoß.

Anschließend werden beide Gegenstände mit $F = m_2 \cdot g \cdot \mu$ abgebremst.

$$(m_2 + m_1) \cdot a = m_2 \cdot g \cdot \mu \quad (a = |a|) \rightarrow a = g \cdot [\mu \cdot m_2 / (m_2 + m_1)]$$

$s = -a/2 \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ (die Beschleunigung ist der Bewegung entgegen gerichtet);

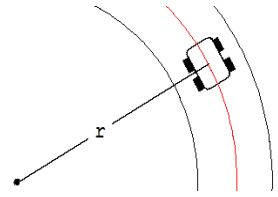
$$t = v_0 / a \rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot v_0^2 / a$$

$$\downarrow s = \frac{1}{2} \cdot v_0^2 \cdot (m_2 + m_1) / (g \cdot \mu \cdot m_2) \rightarrow s = 25 \text{ cm}$$

Zu 3.:

Die Zentripetalkraft geht von der Straße aus.

$$\begin{aligned} \text{Sie beträgt höchstens } \mu \cdot m \cdot g. \\ \mu \cdot m \cdot g = m \cdot v^2 / r \rightarrow \mu \cdot g = v^2 / r \\ \downarrow \\ v^2 = \mu \cdot g \cdot r = 21 \text{ m/s} = 75.6 \text{ km/h} \end{aligned}$$



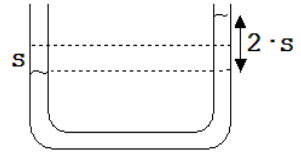
Hinweis:

In der Aufgabenstellung wird man zunächst eine Angabe über die Masse m vermissen. Wenn eine Zahlenangabe zu fehlen scheint, dann sollte man eine Variable für sie setzen in der Hoffnung, dass diese bei der Behandlung der Aufgabe durch Kürzen herausfällt.

Kapitel 10:**Zu 1.:**

Es gilt $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{m/D}$. D und m müssen berechnet werden.

Bläst man in einen Schenkel hinein und bewirkt damit die Auslenkung s , dann stellt sich im anderen Schenkel ein um $2 \cdot s$ höherer Wasserspiegel ein.



Die Gewichtskraft auf die Wassersäule der Länge $2 \cdot s$ ist die zurück treibende Kraft F .

$$F = 2 \cdot s \cdot A \cdot \rho \cdot g \quad (\rho = \text{Dichte des Wassers, } A = \text{Querschnitt des Rohrs})$$

$$D = F / s \rightarrow D = 2 \cdot A \cdot \rho \cdot g; \quad m = L \cdot A \cdot \rho$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L / (2 \cdot g)}; \quad v = 1 / (2 \cdot \pi) \cdot \sqrt{2 \cdot g / L}; \quad T = 0,77 \text{ s}; \quad v = 1,28 \text{ Hz}$$

Zu 2.: Während einer $1/4$ -Schwingung wird beschleunigt. $t = T/4 = \pi/2 \cdot \sqrt{m/D} \approx 5 \text{ ms}$

Zu 3.:

Der Haftvorgang ist eine Halbschwingung. Mit steigender Stoßgeschwindigkeit nimmt die Verformung s der Kugeln beim Stoß zu. F/s bleibt nicht konstant, sein mittlerer Wert wird größer. Da die Schwingungszeit mit steigendem D abnimmt, werden die Kontakte kürzer, wenn der Anfangsabstand vergrößert wird.

Kapitel 13.2:**Zu 1.:**

Das Kind mit der Masse m hat von der Drehachse den Abstand $r + d$.

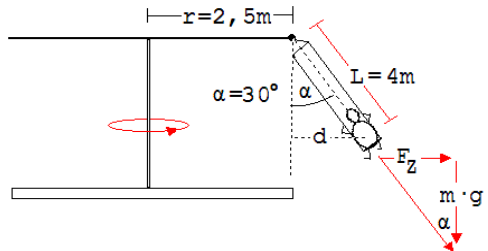
$$d = L \cdot \sin(\alpha)$$

Bei der Winkelgeschwindigkeit ω erfährt es die Zentrifugalkraft F_Z .

$$F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot [r + L \cdot \sin(\alpha)]$$

Die Resultierende aus F_Z und der auf das Kind wirkenden Gewichtskraft $m \cdot g$ ist parallel zu L .

$$m \cdot \omega^2 \cdot [r + L \cdot \sin(\alpha)] / (m \cdot g) = \tan(\alpha) \rightarrow \omega = 1,12 \text{ s}^{-1}$$



Zu 2.:

Wir betrachten eine kleine Wassermenge M der Masse m auf der Wasseroberfläche. Auf M wirkt die Gewichtskraft $m \cdot g$ und die Zentrifugalkraft $m \cdot \omega^2 \cdot x$ ($x = r$!). Da M nicht entlang der Oberfläche verschoben wird, muss die Resultierende aus den beiden Kräften senkrecht zur Wasseroberfläche stehen. Die Parabeltangente durch M hat den Steigungswinkel α . $\tan(\alpha)$ ist die Steigung $y' = dy/dx = 2 \cdot k \cdot x$.

$$y' = m \cdot \omega^2 \cdot x / (m \cdot g) = \omega^2 \cdot x / g \rightarrow k = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 / g \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot x^2 / g$$

Zu 3.:

Die linke und die rechte Feder haben die Federkonstanten D . Die zurück treibende Kraft bei einer Schwingung auf einer ruhenden Scheibe beträgt demnach $F = 2 \cdot D \cdot x$. Unter ihr schwingt die Kugel auf einer ruhenden Scheibe mit der Frequenz f_R .

$$f_R = 1/(2 \cdot \pi) \cdot \sqrt{2 \cdot D/m} \rightarrow D = 4 \cdot \pi^2 \cdot f_R^2 \cdot m / 2 \rightarrow D = 1,97 \text{ N/m}$$

Auf der rotierenden Scheibe wirkt der Federkraft die Zentrifugalkraft $m \cdot \omega^2 \cdot x$ entgegen.

Die zurücktreibende Kraft ist somit $F = 2 \cdot D \cdot x - m \cdot \omega^2 \cdot x = (2 \cdot D - m \cdot \omega^2) \cdot x$

$$(2 \cdot D - m \cdot \omega^2) = D' \rightarrow D' = 3,54 \text{ N/m}$$

$$f = 1/(2 \cdot \pi) \cdot \sqrt{D'/m} \rightarrow f = 0,94 \text{ Hz}$$

