

# Spielereien mit Sinus – und Kosinusfunktionen

**Vorbemerkung:** Mit Sinus und Kosinusfunktionen können schöne Grafiken gestaltet werden. Dies ist mit Hilfe kleiner Programme möglich, die ohne tiefere Kenntnisse einer Programmiersprache auf der Internetseite <https://g-hoehne.de/Sim.html> (frei verfügbar) erstellt werden können.

Man kann davon ausgehen, dass manche Schüler die in diesem Artikel vorgestellten Programme abwandeln, um weitere ansprechende Grafiken zu erzeugen. Damit gewinnen sie automatisch mehr Sicherheit im Umgang mit den Winkelfunktionen. Zudem kann diese Beschäftigung weiterführende Fragen aufwerfen, die sich nahtlos in den Unterricht integrieren lassen – etwa: „Wie kann eine Figur gedreht werden, um eine Rosette zu erzeugen?“. Damit ist ein Anlass gegeben, die Transformationsgleichungen für eine Drehung herzuleiten. Im Anschluss daran sind Überlegungen denkbar, die zu den Additionstheoremen der Winkelfunktionen führen. Diese können dann zur Berechnung von Winkelfunktionswerten genutzt werden.

## Programme zu Grafiken mit Sinus und Kosinus

Als erstes und einfachstes Beispiel für eine derartige Grafik ist hier ein Kreis zu sehen, der mit dem Programm „`r=5; n=360; x=r*cos(g); y = r*sin(g); g=g+1;L=g;`“ gezeichnet werden kann.  $x=r*\cos(g)$ ;  $y = r*\sin(g)$  sind die Koordinaten eines auf dem Kreis (Radius =  $r$ ) liegenden Punktes  $P$ , dessen Verbindungsstrecke zum 0-Punkt des Koordinatensystems mit der  $x$ -Achse den Winkel  $g = \alpha$  (Gradmaß) bildet. Der Buchstabe  $g$  an  $\sin$  und  $\cos$  im angegebenen Programm bedeutet, dass die Winkelfunktionswerte sich auf Winkel im Gradmaß beziehen. Mit dem angegebenen Programm wird der Winkel  $g$  schrittweise um  $1^\circ$  erhöht. Es wird beendet, wenn  $L = n$  ist. Bei  $360^\circ$  ist dies hier der Fall.

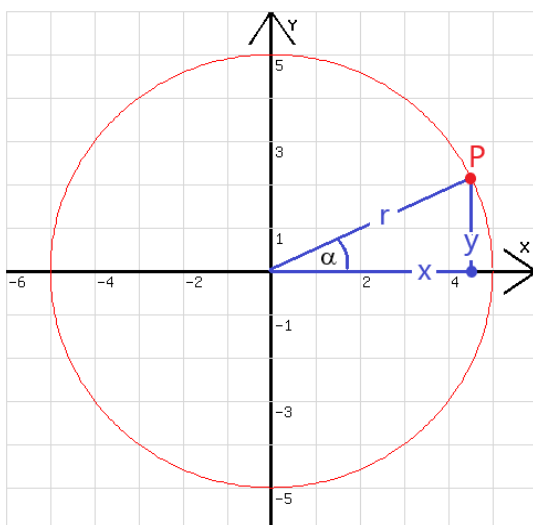


Abb.1

**Definition von  $\sin(\alpha)$  und  $\cos(\alpha)$ :**

$$\sin(\alpha) = y/r$$

$$\cos(\alpha) = x/r$$

Mit „ $a=3; b=5; n=361; x=a*\cos(g); y = b*\sin(g); g=g+1;L=g;$ “ entsteht die Ellipse in der Abb.2 mit „ $a=3; b=5; n=361; x=a*\cos(g); y = b*\sin(g); g=g+45;L=g;$ “ das elliptische 8-Eck in der Abb.3 und mit „ $a=3; b=5; n=360; x=a*\abs{\cos(g)}; y = b*\sin(g); g=g+45;L=g;$ “ das halbe 8-Eck in der Abb.4. Werden die halben 8-Ecke während ihrer Aufzeichnung nach dem Programm „ $a=3; b=5; n=20000; x=a*\abs{\cos(g)}+0,0025*g; y = b*\sin(g); g=g+45;L=g;$ “ Punkt für Punkt um jeweils  $0,25*g$  nach rechts verschoben, dann entsteht ein Band (siehe Abb.5), das nach rechts scheinbar breiter wird. Es bewirkt eine optische Täuschung.

Anmerkung:  $\abs{\cos(g)} = |\cos(g)|$

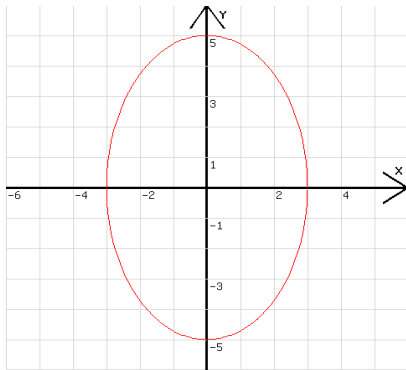


Abb.2

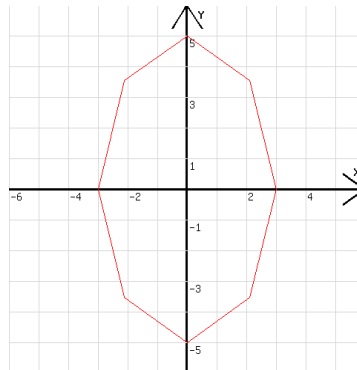


Abb.3

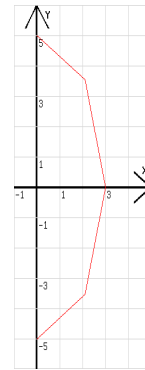


Abb.4

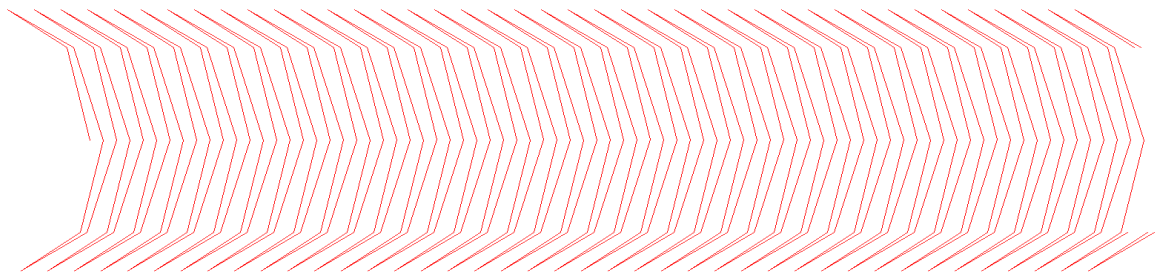


Abb. 5 Vorführung

Die Schleife in der Abb.6 wird mit der nächsten Programmzeile erzeugt.

„ $a=2; b=5; n=361; x=a*\cos(2*g+90);y= b* \sin(g);g=g+1;L=g;$ “

Durch punktweise Verschiebung dieser Schleife nach rechts mit dem Programm „ $a=2; b=5; n=5000; x=a*\cos(2*g+90)+0,01*g;y = b*\sin(g); g=g+1;L=g;$ “ entsteht das in der Abb. 7 sichtbare Ornament.

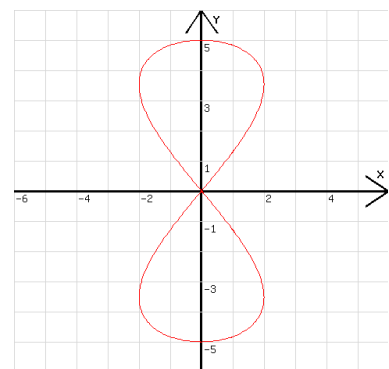


Abb.6

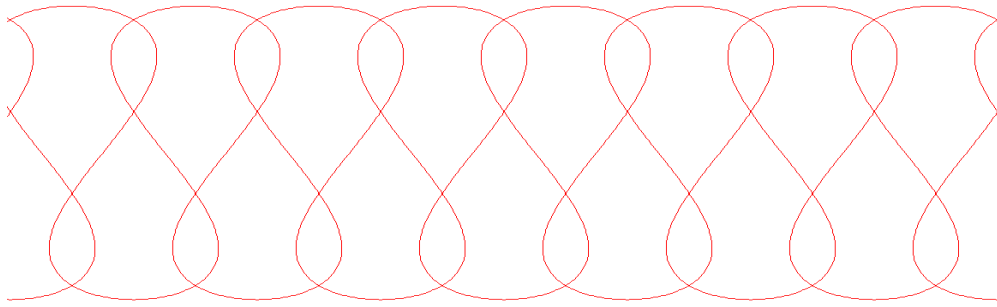


Abb.7 Vorführung

Mit dem Programm „a=2; b=5; n=1440; c=a\*cosg(2\*g+90);d = b\*sing(g);g=g+1;L=g; x=c\*cosg(f)-d\*sing(f);y=c\*sing(f)+d\*cosg(f);f=int(g/360)\*45;g=g+1; L=g“ entsteht die Rosette in der Abb. 8 . Es ist erkennbar, dass sie Schleifen enthält, die durch Drehung der in der Abb. 6 sichtbaren Schleife entstehen.

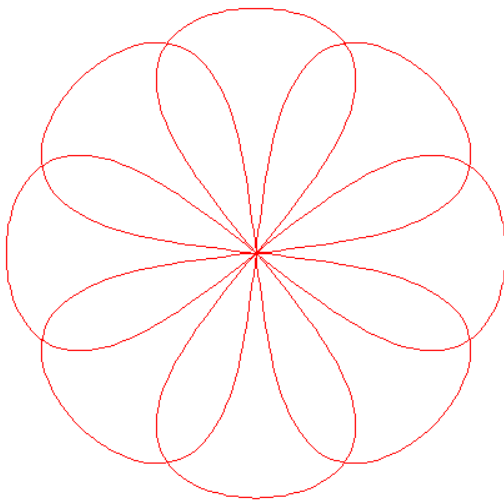


Abb.8 Vorführung

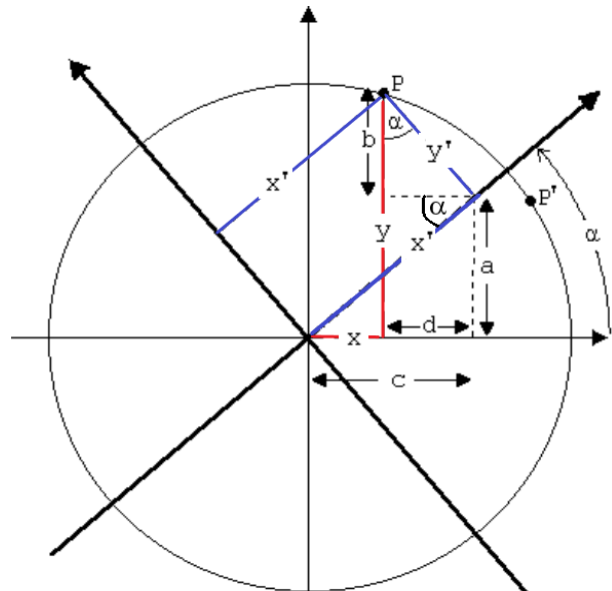


Abb.9

Zum Verständnis des letzten Programms muss folgende Frage beantwortet werden:

**Wie können die Koordinaten (x; y) eines um den Winkel g gedrehten Punktes mit Hilfe seiner ursprünglichen Koordinaten (x'; y') berechnet werden ?**

P' und P in der Abb. 9 sind die Orte vor und nach der Drehung. Für die Koordinaten dieser Punkte gelten die folgenden Gleichungen (Transformationsgleichungen), die leicht mit Blick auf die Abb.9 hergeleitet werden können.

$$x = c - d = x' \cdot \cos(\alpha) - y' \cdot \sin(\alpha)$$

$$y = a + b = x' \cdot \sin(\alpha) + y' \cdot \cos(\alpha)$$

Diese Gleichungen entsprechen den Gleichungen  $x=c*\cosg(f)-d*\sing(f);y=c*\sing(f)+d*\cosg(f)$  in dem für die Rosette geschriebenen Programm. c steht für x' und d für y'.  $f=\text{int}(g/360)*45$  ist der Drehwinkel. Wenn g um  $360^\circ$  zunimmt, dann wird f um  $45^\circ$  vergrößert.

Beim Durchlauf der ersten 360° wird die aufrechte Schleife erzeugt, während der zweiten 360° wird die um 45° gedrehte Schleife gezeichnet usw.

**Anmerkung: Die Integerfunktion int(x) gibt den vor dem Komma stehenden Wert der Zahl x an.**

Die angegebenen Transformationsgleichungen ermöglichen einige interessante Schlussfolgerungen. Der Abstand r des Punktes P' vom Koordinatennullpunkt bilde mit der x'-Achse den Winkel β.

$$x' = r \cdot \cos(\beta) , y' = r \cdot \sin(\beta)$$

Für die x und y Koordinaten des Punktes gedrehten Punktes P gilt demnach:

$$x = r \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - r \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha) \text{ und außerdem } x = r \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

$$y = r \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + r \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) \text{ und außerdem } y = r \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

↓

$$r \cdot \cos(\alpha + \beta) = r \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - r \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)$$

$$r \cdot \sin(\alpha + \beta) = r \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + r \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

↓

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

Die letzten Gleichungen sind als Additionstheoreme der Winkelfunktionen bekannt. Mit ihrer Hilfe können die Sinus- und Kosinus-Werte für jeden beliebigen Winkel α berechnet werden. Wenn z.B. sin(50°) und cos(50°) bestimmt werden sollen, dann geht man zu diesem Winkel bei 0,1° beginnend in kleinen Schritten von beispielsweise 0,1°. cos(0,1°) kann gleich 1 und sin(0,1°) kann mit dem zu 0,1° gehörenden Bogenmaß arc(0,1°) = 2 · π/3600 = 0,0017453283.. gleich gesetzt werden.

**1. Schritt: Berechnung von sin(0,2°) = sin(0,1°+0,1°) und cos(0,2°) = cos(0,1°+0,1°)**

$$\sin(0,2^\circ) = \sin(0,1^\circ + 0,1^\circ) = \sin(0,1^\circ) \cdot \cos(0,1^\circ) + \sin(0,1^\circ) \cdot \cos(0,1^\circ)$$

$$= \sin(0,1^\circ) + 0,0017453283 \cdot \cos(0,1^\circ)$$

$$\cos(0,2^\circ) = \cos(0,1^\circ + 0,1^\circ) = \cos(0,1^\circ) \cdot \cos(0,1^\circ) - \sin(0,1^\circ) \cdot \sin(0,1^\circ)$$

$$= \cos(0,1^\circ) - 0,0017453283 \cdot \sin(0,1^\circ)$$

**2. Schritt: Berechnung von sin(0,3°) = sin(0,2°+0,1°) u. cos(0,3°) = cos(0,2°+ 0,1°)**

$$\sin(0,3^\circ) = \sin(0,2^\circ + 0,1^\circ) = \sin(0,2^\circ) \cdot \cos(0,1^\circ) + \sin(0,1^\circ) \cdot \cos(0,2^\circ)$$

$$= \sin(0,2^\circ) + 0,0017453283 \cdot \cos(0,2^\circ)$$

$$\cos(0,3^\circ) = \cos(0,2^\circ + 0,1^\circ) = \cos(0,2^\circ) \cdot \cos(0,1^\circ) - \sin(0,2^\circ) \cdot \sin(0,1^\circ)$$

$$= \cos(0,2^\circ) - \sin(0,2^\circ) \cdot 0,0017453283$$

**usw.**

$$\sin(\alpha + 0,1^\circ) = \sin(\alpha) \cdot \cos(0,1^\circ) + \sin(0,1^\circ) \cdot \cos(\alpha) = \sin(\alpha) + 0,0017453283 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha + 0,1^\circ) = \cos(\alpha) \cdot \cos(0,1^\circ) - \sin(\alpha) \cdot \sin(0,1^\circ) = \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cdot 0,0017453283$$

Mit dem nachfolgenden Programm in <https://g-hoehne.de/Simhtml> werden die Graphen (siehe Abb.10) zu  $y = \sin(x)$  (rot) und  $z = \cos(x)$  (grün) angelegt .

„ n =360 ; x=x +0,1;y = y+ 0,0017453283\*z; z =z - y\*0,0017453283; L=x “

**Anmerkung:**  $x = \alpha$  bzw.  $\alpha + 0,1$ ,  $y = \sin(\alpha + 0,1^\circ)$  bzw.  $\sin(\alpha)$ ,  $z = \cos(\alpha + 0,1^\circ)$  bzw.  $\cos(\alpha)$

Im Variablenfeld von <https://g-hoehne.de/Sim.html> muss für z der Wert 1 als Anfangswert eingetragen werden.

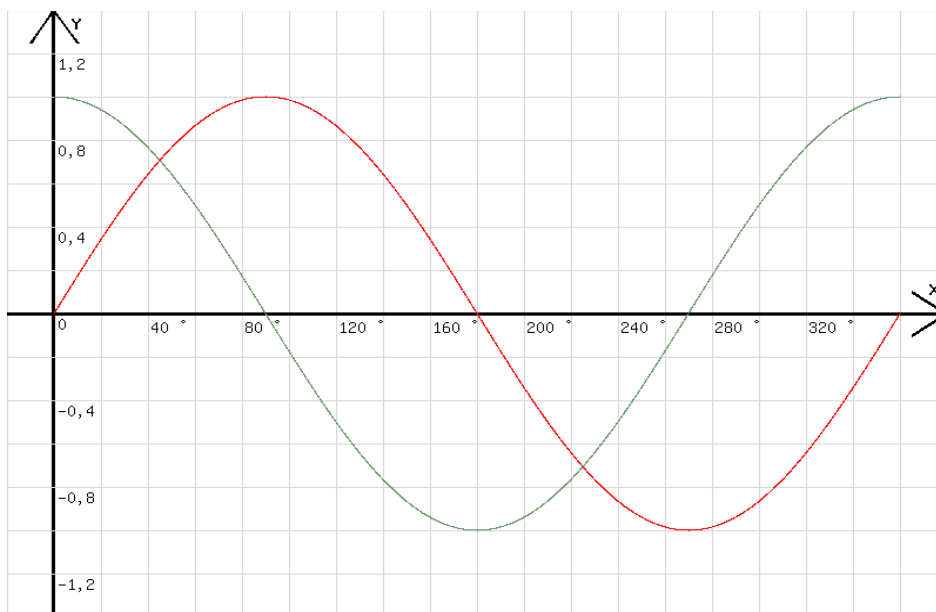


Abb. 10

Den Abschluss dieses Artikels bildet das folgende mit dem Programm „g=g+1;y= sing(3\*g); x = 6\*cosg(g) + 0,02\*g-90“ erstellte Ornament und ein mit breiten Linien nach „g=g+0.1;r=(10\*abs(sing(2\*g))+4\*abs(sing(2\*g+90))-4)\*abs(sing(g\*90));x=r\*cosg(g); z=r\*sing(g);“ gezeichnetes vierblättriges Kleeblatt. Damit soll den Leser ermuntert werden, weitere ansprechende Linienmuster mit den Winkelfunktionen zu entwickeln.



Abb.11



Abb.12

**Schlussbemerkung:**

Die angegebenen Programmzeilen können mit „kopieren, einfügen“ in <https://g-hoehne.de/Sim.html> übertragen werden. **Die Anführungszeichen dürfen nicht mitübertragen werden !**

Die in diesem Artikel vorgestellten Grafiken können in Anlehnung an die angegebenen Programmzeilen auch mit gängigen Tabellenkalkulationsprogrammen erstellt werden. Dies ist jedoch sehr aufwendig